LINEÁRNÍ ALGEBRA

RNDr. Marie Hojdarová, CSc.

Určeno pro studenty PS a AI

Jihlava, říjen 2012

ISBN 978 – 80 – 87035 – 65 -8

Úvod do studia předmětu Základy lineární algebry

Milí studenti!

Lineární algebra, kterou budete nyní studovat, je poněkud „mladší“ partie matematiky než diferenciální počet. Vznikla přibližně v 18. století z potřeby řešit soustavy lineárních rovnic. Od té doby prošla značným rozvojem a dnes má použití v mnoha oborech a hlavně v matematicko-ekonomické praxi spolu s moderní počítačovou technikou.

Matice, o kterých budeme mluvit nejdříve, jsou užitečným prostředkem k přehlednému zaznamenávání údajů týkajících se výroby, spotřeby a dalších důležitých informací. V současnosti se ukládají do paměti počítačů velké matice a vytvářejí tak zvané banky dat, které jsou pak připraveny pro další užití.

Dále se seznámíte s některými algoritmy pro řešení soustav lineárních rovnic o libovolném konečném počtu neznámých, což je účinný nástroj pro řešení úloh např. lineárního programování.

Potom budete studovat vlastnosti vektorových prostorů, speciálně lineárního aritmetického vektorového prostoru, naučíte se pracovat s vektory, a nakonec si povšimnete souvislosti geometrie a algebry při studiu lineárních útvarů v n-rozměrném Euklidovském prostoru, jako je např. přímka, rovina a nadrovina.

Příklady k tomuto kurzu naleznete ve zvláštní internetové aplikaci „Lineární algebra - příklady“, která je též pro vás dostupná.

Přeji vám mnoho úspěchů ve studiu předmětu a uvítám jakékoli vaše důvodné připomínky, které by vedly k vylepšení tohoto studijního materiálu.

RNDr Marie Hojdarová, CSc – garant předmětu

Jihlava, říjen 2012

OBSAH

1. kapitola

Matice a maticové rovnice

1.1. Typy matic

Tabulka čísel o **m** řádcích a **n** sloupcích tvaru

A = $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ se nazývá **matice** typu (m,n).

Čísla a_{ij} se nazývají **prvky matice** a řádkový index *i* znamená řádek, sloupcový index *j* znamená sloupec, ve kterém prvek leží. Pokud $a_{ij} \in \mathbf{R}$ hovoříme o reálné matici.

Prvky, které mají dva stejné indexy tvoří **hlavní diagonálu** matice a nazývají se **diagonální prvky.**

Pokud **m** = **n** je matice **čtvercová,** pokud $\mathbf{m} \neq \mathbf{n}$ je matice obdélníková. Říkáme, že matice o m řádcích a n sloupcích je typu (m,n). Matice obvykle značíme velkými písmeny a její prvky pak malými písmeny.

Tak např.

B = $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ je čtvercová matice typu (2,2), a toto vyjadřujeme kratším způsobem – čtvercová matice je řádu 2 .

C = $\begin{pmatrix} 0 & 8 & 7 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ je obdélníková matice typu (2,3).

Povšimněme si některých speciálních matic:

Nulová matice je matice složená ze samých nul. Např. matice N = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

je obdélníková nulová matice typu (3,2).

Jednotková matice je čtvercová matice, která má v hlavní diagonále jedničky a na ostatních místech nuly. Značí se obvykle **E** nebo **I**. (My ji budeme značit **E**).

Např.

E = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ je jednotková matice řádu 2, **E** = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ je řádu 3 .

Opačná matice -A k původní matici **A** je stejného typu a má všechny prvky s opačnými znaménky než matice **A.**

Tedy k matici **A** = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -6 & 7 \end{pmatrix}$ je opačná matice **-A** = $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & -7 \end{pmatrix}$.

Transponovaná matice $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ k matici **A** je matice**,** u které píšeme řádky matice **A** do sloupců. Je-li tedy původní matice typu (m,n), je transponovaná matice typu (n,m).

A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ je typu (2,3) , $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ = $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ je typu (3,2).

Diagonální matice je matice, jejíž všechny nediagonální prvky jsou nulové a alespoň jeden diagonální prvek je od nuly různý.

Např. **A** = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ je diagonální matice typu (3,4).

Skalární matice je diagonální matice, která má v hlavní diagonále stejné reálné číslo .

Např. **C** = $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ je skalární matice řádu 3, a zřejmě pro tuto matici platí, že **C** = 3.**E** .

Symetrická matice S je taková matice, pro kterou platí $s_{ij} = s_{ji}$, to znamená, že je čtvercová a symetrická podle své hlavní diagonály.

Např. **S** = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 8 \\ 5 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ je symetrická matice řádu 3. Samozřejmě, že všechny jednotkové matice a nulové čtvercové matice a skalární čtvercové matice jsou symetrické.

Horní a dolní trojúhelníková matice jsou takové čtvercové matice, kde diagonální prvky jsou různé od nuly a pro horní trojúhelníkovou matici jsou všechny prvky ležící pod hlavní diagonálou nulové, u dolní trojúhelníkové matice jsou všechny prvky nad hlavní diagonálou nulové.

Tak např. matice **A** = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ je horní trojúhelníková matice řádu 3 a

Matice **B** = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ je dolní trojúhelníková řádu 2.

1.2. Operace s maticemi

Dvě matice jsou si rovny, jsou-li stejného typu, a mají-li na odpovídajících si místech stejné prvky.

Matice násobíme reálným číslem tak, že násobíme všechny jejich prvky tímto číslem. Násobíme-li nulou, dostáváme tedy nulovou matici téhož typu jako matice původní.

Např. mějme matici **A** = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Je potom **5.A** = $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$.

Matice stejného typu můžeme sčítat tak, že sečteme vždy stejnolehlé prvky, tedy prvky se stejnou dvojicí indexů. Tedy např.

Je-li **A** = $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, **B** = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, potom je **součet A** + **B** = $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}$.

Rozdíl matic A – B provedeme tak, že k matici **A** přičteme opačnou matici **–B .** Tedy pro naše dvě matice **A** a **B** bude

A – B = $\begin{pmatrix} -1 & 5 & -8 \\ -2 & -1 & -9 \end{pmatrix}$.

Pro sčítání matic platí komutativní zákon **A** + **B** = **B** + **A** jako pro sčítání reálných čísel, též platí asociativní zákon (**A** + **B**) + **C** = **A** + (**B** + **C**) , a dále

platí distributivní zákon pro násobení reálným číslem, tedy máme-li matice

A a **B** a reálné číslo x, pak je x .(**A**+**B**) = x.**A** + x.**B** .

Násobení matic lze provádět jen s takovými maticemi, kde levá matice má stejný počet sloupců jako má pravá matice řádků. Tedy máme-li matici **A** typu (m,n) a matici **B** typu (r,s), je součin matic **A.B** definován pro n = r, a součin matic **B.A** je definován pro s = m. Z toho již je vidět, že násobení matic není obecně komutativní, někdy lze matice násobit jen v jednom pořadí a v opačném nikoliv, a pokud lze provést obojí násobení, výsledné matice si nemusí být rovny, dokonce ani nemusí být stejného typu. Násobení se pak provádí tak, že skalárně násobíme i-tý řádek levé matice se všemi sloupci, a tím dostáváme i-tý řádek výsledné matice. Obecně lze toto zapsat pro matice **A**(m,n) a **B**(n,s) a prvky c_{ij} výsledné matice **C** = **A.B** takto:

$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, a_{kj}$, kde i = 1, …,m a j = 1,…,s . Výsledná matice je pak typu

(m,s).

Mějme tedy dvě matice

A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, **B** = $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$. Matice **A** je typu (2,3) a matice **B** je typu (3,2).

Součin **C** = **A.B** lze provést (počet sloupců matice **A** je tři, a počet řádků matice **B** je také tři). Výsledná matice je pak typu (2,2) - a je

C = $\begin{pmatrix} 1.2+2.3+3.6 & 1.4+2.(-1)+3.0 \\ 4.2+5.3+6.6 & 4.4+5.(-1)+6.0 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 26 & 2 \\ 59 & 11 \end{pmatrix}$.

Součin **D** = **B.A** lze též provést (styčný rozměr je 2), a výsledná matice **D**

bude typu (3,3).

D = $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ =

= $\begin{pmatrix} 2.1+4.4 & 2.2+4.5 & 2.3+4.6 \\ 3.1-1.4 & 3.2-1.5 & 3.3-1.6 \\ 6.1+0.4 & 6.2+0.5 & 6.3+0.6 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 18 & 24 & 30 \\ -1 & 1 & 3 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix}$.

Čtvercové matice téhož řádu lze samozřejmě násobit v obojím pořadí, ale výsledné matice mohou být různé, dokonce součinem dvou nenulových matic může být i nulová matice (tato poslední vlastnost nikdy neplatí při násobení reálných čísel).

Např. pro matice **A** = $\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ a **B** = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ je **A.B** = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a

B.A = $\begin{pmatrix} -8 & -4 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}$.

Je-li jedna ze dvou matic jednotková nebo skalární, je násobení matic komutativní (přesvědčte se sami).

Pro násobení matic platí distributivní zákon, a tedy je

A. (**B** + **C**) = **A**.**B** + **A**.**C** , (**B** + **C**).**A** = **B**.**A** + **C**.**A** ,

a též zákon asociativní, a tedy je **A**.(**B.C**) = (**A.B**).**C**

Mocnina matice se zavádí pouze pro přirozený exponent, a to tak, že

$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A.A}$, $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A.A.A}$, atd.

Dělení matic není definováno.

1.3. Hodnost matice

Každou matici lze převést na tak zvaný Gaussův tvar. Říkáme, že matice **A** je v Gaussově tvaru, jestliže platí:

a) je-li a_{pr} první nenulový prvek p-tého řádku a a_{st} první nenulový prvek s-tého řádku, a je-li p< s, pak je r<t.

b) každý nenulový řádek matice **A** má nižší řádkový index než kterýkoli nulový řádek této matice.

Tak např. matice **B** = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ není v Gaussově tvaru, poněvadž není splněna podmínka b).

Matice **C** = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ též není v Gauussově tvaru, jelikož není splněna podmínka a). První nenulový prvek prvního řádku (p=1) má sloupcový index r=2. První nenulový prvek 2.řádku (s=2) má sloupcový index t=1. Platí, že p<s, ale není $r < t$.

Matice $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$ jsou v Gaussově tvaru:

$$\mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A_2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Všimněme si, že horní trojúhelníková matice definovaná v paragrafu **1.1.** je speciálním případem matice v Gaussově tvaru. Gaussův tvar existuje pro každou matici, která není nulová.

Hodnost matice **A** – značíme **h(A)** - je počet nenulových řádků v matici upravené na Gaussův tvar. Abychom mohli hodnost matice určit, musíme libovolnou matici umět na Gaussův tvar převést. Toto se provádí elementárními úpravami matice.

Elementární úpravy matice jsou následující úpravy:

a) vzájemná výměna dvou řádků nebo sloupců

b) násobení řádku nebo sloupce číslem různým od nuly

c) přičtení k-násobku j-tého řádku (resp. sloupce) k i-tému řádku(resp. sloupci).

My se omezíme pro jednoduchost pouze na úpravy s řádky.

Uvedené elementární úpravy nemění typ původní matice a matice, které jejich užitím získáváme, nazýváme **ekvivalentní matice** s původní maticí. Přechod od jedné ke druhé značíme vlnovkou. Postupným užitím elementárních úprav získáme po konečném počtu kroků matici v Gaussově tvaru.

Příklad: Převeďme matici **A** = $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ na Gaussův tvar.

Řešení: Nejprve použijeme úpravu a) a vyměníme vzájemně řádek druhý a první, abychom dostali jedničku do horního levého rohu. To se ukazuje výhodné pro nulování sloupce pod touto jedničkou. Dostáváme matici $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Nyní potřebujeme získat nuly v prvním sloupci pod jedničkou.

Použijeme úpravy b) a c). Vynásobíme nejprve 1.řádek číslem (-3), a pak ho přičteme k druhému řádku. Poté vynásobíme opět 1.řádek číslem (-4) a přičteme ho ke třetímu sloupci. Získali jsme

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & -15 \\ 0 & -11 & -28 \end{pmatrix}$. Nyní už nelze pracovat s prvním řádkem. Ve druhém kroku (získání nul ve druhém sloupci) použijeme druhý řádek. Tam ale bohužel nemáme jedničku, ale číslo (-5). Musíme tedy pro získání nuly pod touto minus pětkou provést násobení druhého řádku číslem (-11) a třetího řádku číslem 5, a pak řádky sečíst. Dostáváme

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & -15 \\ 0 & -11 & -28 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$. Tato matice již je v Gaussově tvaru.

Posloupnost elementárních úprav, které zvolíme k převedení matice do Gaussova tvaru, není určena jednoznačně. Pokud zvolíme jiné elementární úpravy, můžeme dostat výslednou matici v Gaussově tvaru s jinými prvky. Všechny takto získané matice budou mít ale jedno společné, a to počet nenulových řádků, což je hodnost matice.

Hodnot naší matice **A** je rovna třem. Zapíšeme **h(A)** = 3 .

Pro hodnost matice zřejmě vždy platí, že je menší nebo rovna minimu z počtu řádků a sloupců, tedy $\mathbf{h(A)} \leq \min(m,n)$.

Pro každou matici též zřejmě platí, že $\mathbf{h(A)} = \mathbf{h(A^T)}$. Vznikne-li totiž řádkovými úpravami z matice **A** matice G, která je v Gaussově tvaru, vznikne z matice $\mathbf{A^T}$ týmiž elementárními úpravami se sloupci matice $\mathbf{G^T}$, která je též v Gaussově tvaru. Jelikož je $\mathbf{h(G)} = \mathbf{h(G^T)}$, je též $\mathbf{h(A)} = \mathbf{h(G)} = \mathbf{h(G^T)} = \mathbf{h(A^T)}$.

1.4. Inverzní matice

V tomto odstavci budeme hovořit pouze o čtvercových maticích.

Říkáme, že čtvercová matice řádu **n** je **regulární**, jestliže $\mathbf{h(A)} = \mathbf{n}$, a je **singulární**, jestliže $\mathbf{h(A)} < \mathbf{n}$.

Pro matice regulární zavádíme **inverzní matici** $\mathbf{A^{-1}}$, pro kterou platí

$\mathbf{A.A^{-1}} = \mathbf{A^{-1}.A} = \mathbf{E}$. Povšimněme si, že násobení matice **A** a matice k ní inverzní

$\mathbf{A^{-1}}$ je komutativní. Rovněž tak je pro čtvercové matice komutativní násobení nulovou, jednotkovou a skalární maticí.

Ukažme si, že ke každé regulární matici **A** existuje právě jedna inverzní matice $\mathbf{A^{-1}}$. Předpokládejme, že existují dvě různé inverzní matice $\mathbf{A_1^{-1}}, \mathbf{A_2^{-1}}$. Potom je $\mathbf{A_1^{-1}} = \mathbf{A_1^{-1}.\,E} = \mathbf{A_1^{-1}}.\,(\mathbf{A.A_2^{-1}}) = (\mathbf{A_1^{-1}.A})\,\mathbf{A_2^{-1}} = \mathbf{E.A_2^{-1}} = \mathbf{A_2^{-1}}$, což je spor s předpokladem, že $\mathbf{A_1^{-1}} \neq \mathbf{A_2^{-1}}$.

Výpočet inverzní matice přímo z definice bývá velice zdlouhavý a vede k řešení soustav rovnic. Existují ale i další způsoby, jak inverzní matici nalézt. Jedním z nich je výpočet inverzní matice pomocí elementárních úprav.

Nejprve je třeba si uvědomit, že každá elementární úprava čtvercové matice **A** je ekvivalentní s násobením matice **A** speciální regulární maticí **B** z levé strany. Matici **B** získáme tak, že provedeme v jednotkové matici **E** tutéž elementární úpravu, kterou chceme dosáhnout u matice **A**.

Chceme-li např. v matici **A** =$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ vynásobit 1.řádek konstantou **k** a přičíst ho ke 2.řádku, lze této úpravy dosáhnout též tak, že v jednotkové matici **E** = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ vynásobíme 1.řádek konstantou **k** a přičteme ho ke 2.řádku. Dostáváme tak matici B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{k} & 1 \end{pmatrix}$, a touto maticí **B** vynásobíme zleva matici **A**.

Je **B.A** = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{k} & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \mathbf{k}. a_{11} + a_{21} & \mathbf{k}. a_{12} + a_{22} \end{pmatrix}$, což je skutečně

původní matice **A** po žádané elementární úpravě.

Libovolnou regulární matici **A** můžeme konečným počtem elementárních úprav převést na jednotkovou matici **E**. To znamená, že existuje posloupnost matic, kterými násobíme postupně matici **A** zleva a výsledkem je matice **E**. Označme tuto posloupnost matic (je to vlastně součin matic, které představují jednotlivé elementární úpravy) písmenem **B**. Je pak **B.A** = **E**. Provedeme-li tytéž úpravy na matici jednotkovou, dostáváme matici **B**, jelikož je **B.E** = **B**. Ze vztahu **B.A** = **E** ovšem vyplývá, že **B** = $\mathbf{A}^{-1}$, a **B** je tedy matice inverzní k matici **A**.

Proto provádíme výpočet inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ takto:

Napíšeme si za sebe matici **A** a jednotkovou matici téhož řádu. Získáme obdélníkovou matici tvaru (**A**|**E**). Na tuto matici provádíme elementární úpravy tak, aby vlevo od svislé čáry vznikla jednotková matice **E**. Vpravo potom dostáváme inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$.

Příklad: Najděme inverzní matici k matici **A** =$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$.

Řešení: Sestrojíme si matici $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 11 & 0 & 1 \end{array}\right)$ a vlevo vytváříme postupně

jednotkovou matici. Nejprve opišme 1.řádek, první řádek pak vynásobme číslem (-2) a sečtěme s 2.řádkem. Dostáváme matici

$\begin{pmatrix} 1 & 5 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Nyní upravíme druhý sloupec této matice na sloupec jednotkové matice. Jedničku na určeném místě již máme, tedy 2.řádek opíšeme beze změny. Nulu nad jedničkou získáme tak, že 2.řádek vynásobíme číslem (-5) a sečteme ho s 1.řádkem. Dostáváme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 11 & -5 \\ 0 & 1 & | & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Poněvadž vlevo od svislé čáry se již nachází jednotková matice, je vpravo od svislé čáry matice inverzní k matici **A**.

Proveďme zkoušku: Jestli jsme počítali správně, musí platit

$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ = **E** . Tato rovnost skutečně platí (přesvědčte se sami).

Je tedy $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

To místo, kde má být ve vytvářené jednotkové matici jednička, nazýváme klíčové místo, prvek, který je na tomto místě, je **klíčový prvek**. Je tedy nutné v každém sloupci nejprve převést klíčový prvek na jedničku a potom všechny ostatní prvky téhož sloupce anulovat.

Pokud by matice **A** nebyla regulární, vynuluje se nám při elementárních úpravách nějaký řádek, a matici $\mathbf{A}^{-1}$ není možno vytvořit.

1.5. Maticové rovnice

Maticové rovnice, jsou takové rovnice, jejichž levé i pravé strany jsou matice nebo algebraické výrazy obsahující matice. Řešit maticovou rovnici znamená najít buď všechny prvky neznámé matice **X**, nebo případně pouze některé neznámé prvky matice **X** tak, aby vznikla identita.

Máme-li na příklad rovnici **A** + **X** = **B** kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ a **X** je neznámá matice, vypočteme si nejprve obecně, že **X** = **B** – **A** **,** a potom provedeme příslušnou maticovou operaci.

Je $\mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, neboli matice $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Nebo mějme rovnici $\mathbf{X}^2 = \mathbf{X}$ **,** kde matice $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix}$. Známe tedy její dva prvky a dva jsou neznámé.

Spočítáme si nejprve $\mathbf{X}^2$ neboli **X.X** **.**

Je $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & x+y \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$. Rovnice má tedy tvar

$\begin{pmatrix} x^2 & x+y \\ 0 & y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix}$. Odtud máme tři rovnice: $x^2 = x$, $y^2 = y$, $x + y = 1$.

Této soustavě vyhovují dvě dvojice čísel, a to buď $x = 0$, $y = 1$ nebo $x = 1$, $y = 0$.

Existují tedy dvě matice $\mathbf{X}_1$ a $\mathbf{X}_2$ **,** které vyhovují dané maticové rovnici.

$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Povšimněme si nyní rovnic, které obsahují násobení neznámé matice danou maticí.

Mějme rovnici tvaru **A.X = B** **.** Vzhledem k tomu, že dělení matic není definováno, musíme odstranit matici **A** z levé strany jiným způsobem. Vynásobme maticovou rovnici inverzní maticí $\mathbf{A}^{-1}$ **zleva.**
Dostaneme $\mathbf{A}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{B}$ **.**

Víme, že $\mathbf{A}^{-1}.\mathbf{A} = \mathbf{E}$, tedy je $\mathbf{E}.\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{B}$, neboli je $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{B}$. (Násobení jednotkovou maticí ať zleva nebo zprava totiž násobenou matici nemění, jednotková matice se chová jako jednička v oboru reálných čísel).

Kdybychom vynásobili rovnici maticí $\mathbf{A}^{-1}$ **zprava,** nedostaly by se matice **A** a $\mathbf{A}^{-1}$ vedle sebe a matici **X** bychom nezískali. Musíme tedy rozlišovat, zda máme násobit zprava nebo zleva, jelikož násobení matic není komutativní.

Tak např. rovnici **X.A = B** musíme násobit maticí $\mathbf{A}^{-1}$ zprava a dostáváme, že

$\mathbf{X} = \mathbf{B}.\mathbf{A}^{-1}$.

Rovnici **A.X.B = C** musíme násobit maticí $\mathbf{A}^{-1}$ zleva a maticí $\mathbf{B}^{-1}$ zprava.

Dostaneme $\mathbf{A}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{X}.\mathbf{B}.\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{C}.\mathbf{B}^{-1}$ **,** což je $\mathbf{E}.\mathbf{X}.\mathbf{E} = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{C}.\mathbf{B}^{-1}$, tedy je

$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{C}.\mathbf{B}^{-1}$.

Příklad: Řešme maticovou rovnici **X.(A – B).C** = **D** **,** kde **A** = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

B = $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, **C** = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, **D** = $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Řešení: Nejprve musíme násobit maticí $\mathbf{C}^{-1}$ zprava a dostaneme **X.(A – B)** = $\mathbf{D.C}^{-1}$ a dále je třeba násobit maticí $\mathbf{(A - B)}^{-1}$ opět zprava a dostáváme

X = $\mathbf{D.C}^{-1}\mathbf{.}\ \mathbf{(A - B)}^{-1}$. Toto provedeme s danými maticemi. Je **A** – **B** = $\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

.

Dále je $\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{(A - B)}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ (spočítejte sami)

A je tedy pak $\mathbf{X} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Postupným násobením matic v zapsaném pořadí

dostáváme $\mathbf{X} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -45 & 98 \\ -63 & 138 \end{pmatrix}$.

Kapitola 2

DETERMINANTY A JEJICH VLASTNOSTI

1.1. Pojem determinantu

Ke každé reálné čtvercové matici **A** je určitým předpisem přiřazeno reálné číslo, které se nazývá **determinant příslušný k matici A** a značí se **det A**.

Vysvětlíme si, jak se zavádí.

Mějme množinu **M** = $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Prosté zobrazení množiny **M** na sebe sama se nazývá **permutace množiny M.** Každá permutace přiřadí prvku i prvek j_i

přičemž $i \in$ **M** a též $j_i \in$ **M** **.**

Např. pro množinu M = $\{1,2,3\}$ dostáváme permutace $\{1,2,3\}$ − což je

základní permutace ,

a další permutace jsou $\{1,3,2\}$, $\{2,3,1\}$, $\{2,1,3\}$, $\{3,1,2\}$, $\{3,2,1\}$.

Počet permutací P(n) je roven n! .

Říkáme dále, že dvojice prvků permutace j_i , j_k tvoří **inverzi,** je-li $i < k$ a přitom je $j_i > j_k$. Permutace je **sudá,** obsahuje-li sudý počet inverzí a je **lichá**, obsahuje-li lichý počet inverzí.

Determinant **det A** příslušný ke čtvercové matici **A** řádu n definujeme jako reálné číslo, které je rovno součtu součinů typu $a_{1j_1} a_{2j_2} \dots . a_{nj_n}$ kde znaménko před součinem je plus, je-li permutace sloupcových indexů sudá a mínus, je-li tato permutace lichá.

Tedy zapíšeme **det A** = $\sum(-1)^I a_{1j_1} . \dots . a_{nj_n}$ přes všechny permutace sloupcových indexů, kde *I* je počet inverzí v permutaci.

Pro n = 1 je matice řádu jedna, tedy jedno číslo, **A** = $[a_{11}]$, nelze permutovat a determinant **det A** = a_{11} .

Pro n = 2 je matice tvaru **A** = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ a máme jednu permutaci sudou

$\{1, 2\}$ a jednu permutaci lichou $\{2, 1\}$. **det A** = $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Toto lze snadno počítat tak zvaným **křížovým pravidlem**, které spočívá v tom, že vynásobíme prvky v hlavní diagonále a odečteme součin prvků v tak zvané vedlejší diagonále.

Determinant se na rozdíl od matice zapisuje mezi dvě svislé čáry.

Tak např. $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$ = 3.8 – 4.4 = 24 – 16 = 8

Pro n = 3 je matice tvaru **A** = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ a počet možných permutací je 6, jak jsme již výše zjistili. Tři z nich jsou sudé a tři z nich liché.

Sudé jsou permutace $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 1\}$ a $\{3, 1, 2\}$, přičemž první obsahuje 0 inverzí, druhá obsahuje dvě inverze a třetí obsahuje též dvě inverze.

Liché jsou permutace $\{1, 3, 2\}$, $\{2, 1, 3\}$ a $\{3, 2, 1\}$. První a druhá obsahují 1 inverzi a třetí obsahuje 3 inverze.

det A = $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{31}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$

což lze realizovat tak zvaným **Sarrusovým pravidlem** tak**,** že násobíme nejprve prvky hlavní diagonály a pak se posouváme rovnoběžně doprava, kde si pomocně připíšeme 1.a 2.sloupec. Až dojdeme na konec, začneme násobit podobně z pravého horního rohu a opět se posouváme rovnoběžně, ale doleva. K součinům vytvořeným zprava přidáváme znaménko mínus.

Tedy např. mějme determinant **det A** = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

Přidáme si k determinantu dva pomocné sloupce, první a druhý, a dostáváme $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{matrix}$ a násobíme diagonálně z levého horního rohu a posouváme se rovnoběžně. Je tedy 1.0.(-2) + 2.5.6 + 4.3.1 . Pokračujeme z pravého horního rohu diagonálně, posouváme se a členy mají znaménko mínus. Je tedy - 2.3.(-2) - 1.5.1 - 4.0.6 . Nyní vše sečteme a dostáváme 0 + 60 + 12 +12- 5-– 0 což se rovná 79. Je tedy **det A** = 79.

Další příklad proveďme rychleji. Máme spočítat **det B** = $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

Napíšeme si $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix}$ a počítáme 1.1.0 + 0.1.3 + 2.1.2 – 0.1.0 – 1.1.2 – 2.1.3 = 0 + 0 + 4 – 0 – 2 – 6 = -4 . **det B** = -4 .

2.2. Základní vlastnosti determinantu

Všechny vlastnosti determinantu lze dokázat pomocí práce s permutacemi a jejich inverzemi. My si je zde pouze uvedeme.

1***)*** **det A** = **det** $\mathbf{A}^T$

2) Má-li matice A jeden řádek nebo sloupec (zkráceně hovoříme o řadě, což může být buď řádek nebo sloupec) složený ze samých nul, pak je

det A = 0 .

3) Nahradíme-li v matici **A** jednu řadu jejím c-násobkem, dostaneme matici **B,** pro kterou platí **det B** = c. **det A** . Tedy při násobení determinantu reálným číslem se násobí pouze jedna řada determinantu, a ne všechny prvky jako u matice.

Jako příklad si vezměme **det B**, který je uveden výše a je roven čtyřem. Vezmeme-li **det C** takový, že 1.řádek determinantu **B** násobíme pěti a ostatní ponecháme beze změny, je **det C** = $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$, a tento determinant po spočtení Sarrusovým pravidlem vychází -20 (přesvědčte se sami).

Je tedy skutečně **det C** = 5 . **det B** **.**

4) Zaměníme-li v determinantu spolu dvě rovnoběžné řady, změní determinant znaménko.

5) Má-li determinant dvě rovnoběžné řady stejné, je roven nule.

6) Je-li v determinantu jedna řada násobkem jiné rovnoběžné řady, je determinant roven nule.

7) Determinant horní nebo dolní trojúhelníkové matice je roven součinu prvků hlavní diagonály (speciálně **det E** = 1)

8) Přičteme-li v determinantu k jedné řadě c-násobek jiné rovnoběžné řady, hodnota determinantu se nezmění.

9) Determinant regulární matice je různý od nuly, determinant singulární matice je roven nule.

10) **det (A.B)** = **det A** . **det B** .

2.3. Subdeterminant, algebraický doplněk determinantu

Subdeterminant determinantu n-tého řádu je determinant řádu nižšího než **n**, který dostaneme z původního determinantu vynecháním stejného počtu svislých a vodorovných řad.

Např. pro **det A** = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, který je sám 3.řádu, můžeme nalézt 9 subdeterminantů 1.řádu (což jsou jednotlivé prvky determinantu) a 9 subdeterminantů 2.řádu, z nichž pro příklad uveďme dva: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$, kde jsme vynechali 2.řádek a 2.sloupec , a $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$, kde jsme vynechali 2.řádek a 3.sloupec.

Algebraický doplněk A_{ij} k prvku a_{ij} v determinantu n-tého řádu je subdeterminant (n-1) –ho řádu, získaný tak, že z původního determinantu vynecháme i-tý řádek a j-tý sloupec a celý subdeterminant násobíme

číslem $(-1)^{i+j}$.

Tedy např. pro prvek a_{11} výše uvedeného **det A** , tedy pro jedničku v levém horním rohu, je algebraický doplněk

$$\mathbf{A_{11}} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} .$$

Pro libovolný determinant platí

det A = $a_{i1}\mathbf{A_{i1}}$ + $a_{I2}\mathbf{A_{I2}}$ + … + $a_{in}\mathbf{A_{in}}$, kde i je index libovolně zvoleného řádku, což znamená, že prvky tohoto libovolně zvoleného řádku násobíme jejich algebraickými doplňky a tyto součiny sečteme. **det A** lze tedy spočítat tak zvaným **rozvojem podle i-tého řádku**. Rozvoj lze též provést pomocí libovolného sloupce, je tedy

det A = $a_{1j}\mathbf{A_{1j}}$ + $a_{2j}\mathbf{A_{2j}}$ + … + $a_{nj}\mathbf{A_{nj}}$, kde j je libovolný vybraný sloupec.

Tato metoda se hodí pro výpočet determinantů vyššího řádu než 3, protože tam již nelze použít Sarrusovo pravidlo. Nicméně je možné ji použít i na výpočet determinantu řádu 3.

Metoda je vhodná především, obsahuje-li determinant více nul v jedné řadě. Tuto řadu si pak vybereme, rozvádíme podle ní, a tím se sníží počet doplňků, které musíme počítat.

Mějme např. **det B** = $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. V každé řadě máme nejvýše dvě nuly.

Vezmeme tedy jednu řadu se dvěma nulami, vyberme např. 1.řádek, a provedeme rozvoj. Dostaneme

$1.\,(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 1.\,(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ a dále lze dopočítat buď Sarrusovým pravidlem, nebo rozvádíme znovu, pro 1.determinant vybereme na rozvoj 2.sloupec a pro 2.determinant vybereme 1.sloupec.

Je $1.\,(-1)^{1+1}.\,(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1.\,(-1)^{1+3}\,(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 + (-1) = -2$.

Jiná možnost pro výpočet determinantu vyššího řádu je využít elementárních úprav a vlastností determinantů, převést příslušnou matici na diagonální tvar, a pak je podle vlastnosti 7) determinant roven součinu prvků v hlavní diagonále.

V tomto případě je třeba si skutečně dobře uvědomit, které elementární úpravy nemění determinant a které ano.

2.4. Výpočet inverzní matice pomocí determinantů

Inverzní matici k regulární čtvercové matici lze též hledat metodou **adjungované matice G** . Je to transponovaná matice algebraických doplňků.

$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \mathbf{G}$.

Najděme inverzní matici k matici **A** = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

det A = 6 – 5 = 1 . Agebraické doplňky jsou $\mathbf{A_{11}} = (-1)^{1+1}.\ 3 = 3$ **,**

$\mathbf{A_{12}} = (-1)^{1+2}.\ 5 = -5$, $\mathbf{A_{21}} = (-1)^{2+1}.\ 1 = -1$, $\mathbf{A_{22}} = (-1)^{2+2}.\ 2 = 2$.

Tyto doplňky napíšeme transponovaně a dostaneme matici G.

G = $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$. Tuto matici vynásobíme číslem $\frac{1}{\det A}$, což je u nás $\frac{1}{1}$ = 1.

Inverzní matice je tedy $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Všimněte si, že u matice řádu 2 kromě výpočtu determinantu vlastně jen vyměníme prvky v hlavní diagonále a u druhých dvou prvků změníme znaménko. Výpočet je tedy velmi rychlý.

U matice řádu 3 je třeba vypočítat jeden determinant 3.řádu a 9 algebraických doplňků – determinantů 2.řádu. Nicméně u celočíselné matice nepočítáme až do konce se zlomky, což se u výpočtu inverzní matice pomocí elementárních úprav často nezdaří.

Kapitola 3

Řešení soustav lineárních rovnic

1.1. Gaussova eliminační metoda, Frobeniova věta

Soustavou lineárních rovnic rozumíme **m** rovnic o **n** neznámých, kde **m** může i nemusí být rovno **n** :

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$

…….

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou neznámé, $b_1, b_2, \dots, b_n$ jsou konstanty, které vytvářejí sloupec pravých stran, matice koeficientů a_{ij} se nazývá **matice soustavy** , táž matice rozšířená vpravo o jeden sloupec, a to sloupec pravých stran rovnic, se nazývá **rozšířená matice soustavy.** Řešit soustavu znamená najít všechny n-tice neznámých, které soustavě vyhovují – to znamená po dosazení vytvářejí identitu všech levých a pravých stran.

Tuto soustavu lze zapsat v maticovém tvaru **AX** = **B** , kde **A** je matice soustavy, **X** je matice neznámých typu (n, 1) a **B** je matice pravé strany typu (m, 1).

Gaussova metoda pro řešení soustavy lineárních rovnic spočívá v tom, že pracujeme s rozšířenou maticí soustavy. Nejprve ji uvedeme na Gaussův tvar – to je přímý chod Gaussovy metody. Po té vypočítáváme neznámé postupně od konce, to je zpětný chod Gaussovy metody. Vše si ukážeme na příkladech.

Příklad: Řešme soustavu Gaussovou metodou

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7 \\ x_1 + 3x_2 \phantom{{}+2x_3} &= 7 \end{aligned}$$

Napišme si rozšířenou matici soustavy a upravme ji postupně na Gaussův tvar $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array}\right)$. Tím končí přímý chod metody. Nyní ze třetího řádku vypočteme x_3 . Je $6x_3 = 18$, tedy $x_3 = 3$.

Toto x_3 dosadíme do 2.řádku a vypočteme z něho x_2 . je $x_2 - 3 = -1$, a tedy

$x_2 = 2$. Z prvního řádku spočteme x_1 , po té co dosadíme za x_3 a x_2 .

Je $x_1 + 2.2 + 3 = 8$, tedy je $x_1 = 1$. Celé řešení napíšeme přehledně ve tvaru

$X = (1, 2, 3)^T$ a provedeme zkoušku tak, že trojici čísel dosadíme do **všech** rovnic a kontrolujeme, zda nám vyšla identita.
Znak transpozice píšeme za závorkou proto, že řešení nám vyšlo ve sloupci, bylo tedy typu (3,1), a my ho zapisujeme v řádku, tedy transponovaně.

Příklad: Řešme soustavu

$x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$

$x_1 - x_2 + x_3 = 2$

$2x_1 + x_2 = 5$.

Opět upravujeme rozšířenou matici na Gaussův tvar.

Je $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 2 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$.

Vidíme, že tato soustava nemá řešení, jelikož neplatí, že $0 = -3$.

Jak tedy poznáme, že soustava nemá řešení? Při úpravě rozšířené matice vyjdou v některém řádku vlevo od svislé čáry samé nuly a vpravo od čáry je nenulové číslo. To ovšem znamená, že hodnost matice soustavy je menší než hodnost rozšířené matice soustavy. O tom hovoří 1.část důležité věty o řešitelnosti soustav lineárních rovnic, která se nazývá **Frobeniova věta.** Vyslovíme si ji později.

Příklad: Řešme soustavu

$x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$

$x_1 - x_2 + x_3 = 2$

$2x_1 + x_2 \quad = 8$.

Je $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Poslední řádek nám říká, že nula se rovná nule, což je zřejmá identita. Zbývají nám dvě rovnice, které mají ale tři neznámé. První dvě neznámé se vyskytují v trojúhelníkové matici hodnosti 2, třetí neznámá je zde navíc. Nazveme ji **parametr,** převedeme ji na druhou stranu rovnice, a obě první neznámé vyjádříme pomocí ní. Vzhledem k tomu, že parametr může být jakékoli reálné číslo, má soustava nekonečně mnoho řešení.

Je z druhého řádku $--3x_2 = -- 4 -- 2x_3$, je tedy $x_2 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}x_3$, a z prvního řádku

je $x_1 = 6 - 2.\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}x_3\right) + x_3 = \frac{10}{3} - \frac{1}{3}x_3$.

Řešení opět zapíšeme přehledným způsobem

$X = \left(\frac{10}{3} - \frac{1}{3}x_3, \frac{4}{3} + \frac{2}{3}x_3, x_3\right)^T, x_3 \in \mathbf{R}$. Tvar řešení, který obsahuje parametry,

se nazývá **obecné řešení** . Je v něm obsaženo nekonečně mnoho řešení pro různé volby parametrů.

Povšimněme si, kdy má soustava nekonečně mnoho řešení. Hodnost matice soustavy a hodnost rozšířené matice soustavy byla stejná, ale rovnala se dvěma, a neznámé přitom byly tři. Proto se z jedné neznámé stal parametr.

Nyní již můžeme vyslovit celou Frobeniovu větu.

Frobeniova věta o řešitelnosti soustav lineárních rovnic:

Soustava **AX** = **B ,** kde $\mathbf{A_r}$ = **(A** | **B)** je rozšířená matice soustavy, je řešitelná právě když **h(A)** = $\mathbf{h(A_r)}$**.**

Je-li **n** počet neznámých, má soustava jediné řešení právě když je **h(A)** = $\mathbf{h(A_r)}$ = **n** a má nekonečně mnoho řešení právě když je **h(A)** = $\mathbf{h(A_r)} < \mathbf{n}$.

Soustava, která má na pravé straně samé nuly, se nazývá **homogenní soustava,** na rozdíl od soustav, kterými jsme se dosud zabývali, - ty jsou nehomogenní.

Homogenní soustava má několik zvláštností. Elementárními transformacemi s nulami nemůže vzniknout nic jiného než zase nula, proto na pravé straně rovnic zůstávají samé nuly. Není tedy nutné pro úpravy psát rozšířenou matici soustavy, ale jen matici soustavy. Dále je zřejmé, že nemůže vzniknout situace, kdy soustava nemá řešení (na pravé straně není nenulové číslo). Z toho vyplývá, že **homogenní soustava je vždy řešitelná**. Pokud je hodnost matice soustavy rovna počtu neznámých (jedno řešení), bude z poslední rovnice poslední neznámá rovna nule atd., čili všechny neznámé se budou rovnat nule. Takové řešení složené ze samých nul se nazývá **triviální řešení.** Teprve pokud bude hodnost matice soustavy menší než počet neznámých (nekonečně mnoho řešení), můžeme volbou parametrů docílit nenulového **netriviálního řešení**.

Příklad: Řešme soustavu

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0$

$5x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 0$.

Matice soustavy upravíme na Gaussův tvar. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 5 & -7 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & -12 & 3 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$. Hodnost matice je tři, to znamená, že řešením jsou samé nuly. Je tedy jediné řešení **X** $= (0, 0, 0)^T$, je to triviální řešení.

3.2. Metoda úplné eliminace (Jordanova)

Tato metoda pracuje opět s rozšířenou maticí soustavy, ale místo úpravy na Gaussův tvar musíme tuto matici upravit tak, aby matice soustavy přešla na jednotkovou matici, která může mít přeházené řádky. Pak máme v každém řádku jednu vypočítanou neznámou a metoda již nemá zpětný chod. Nicméně elementárních úprav je více než u Gaussovy metody, takže pro ruční počítání není metoda příliš vhodná. Používá se hlavně pro počítačové zpracování soustav.

Příklad: Řešme soustavu úplnou eliminací

$x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3$

$2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1$

$3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2$

Matice soustavy je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. Budeme vytvářet postupně zleva sloupce jednotkové matice, začneme jako u Gaussovy metody. Je

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \end{array}\right)$$

. Nyní se hodí vytvořit jedničku ve druhém sloupci a třetím řádku, tedy vydělíme třetí řádek pěti.

Je $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{5} & \frac{-7}{5} \end{array}\right)$ a vynulujeme sloupec nad touto jedničkou.

Je tedy $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{6}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{5} & \frac{-7}{5} \end{array}\right)$. Nyní si připravíme jedničku ve druhém řádku a třetím sloupci, tedy 2.řádek vydělíme číslem (-5).

Je $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{6}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{5} & \frac{-7}{5} \end{array}\right)$ a vytvoříme nuly nad a pod jedničkou ve třetím sloupci.

Dostáváme konečně $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Řešení je tedy $\mathbf{X} = (-1, 0, 1)^T$.

3.3. Řešení soustavy s regulární maticí Cramerovým pravidlem

Cramerovo pravidlo je metoda pro řešení soustav lineárních rovnic, která používá determinantů.

Pro neznámou x_j v soustavě lineárních rovnic platí $\mathbf{x_j} = \frac{\det A_j}{\det A}$, kde $\mathbf{\det A_j}$

Dostaneme z determinantu matice soustavy **A** záměnou j-tého sloupce za sloupec pravých stran. Je zřejmé, že matice **A** musí být regulární, jinak by byl **detA** = 0 a metodu by nebylo možné použít.

Vzhledem k tomu, že výpočet determinantů vyšších řádů než 3 je poměrně obtížný, používá se tato metoda většinou jen pro soustavu tří rovnic o třech neznámých s regulární matricí soustavy. Je to tedy metoda více méně okrajového významu.

Příklad: Cramerovým pravidlem řešme soustavu

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$

$4x_1 + x_2 + 4x_3 = 9$

$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 10$.

Determinant příslušný k matici soustavy **det A** = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 41$.

$\mathbf{\det A_1} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 9 & 1 & 4 \\ 10 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 41$, $\mathbf{\det A_2} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 4 \\ 3 & 10 & 2 \end{vmatrix} = 41$

$\mathbf{\det A_3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 41$. Je tedy $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{41}{41} = 1$.

Řešení je $\mathbf{X} = (1, 1, 1)^T$. Zkoušku provedeme opět dosazením do všech rovnic.

3.4. Řešení soustav lineárních rovnic s regulární maticí soustavy pomocí inverzní matice

Již bylo uvedeno, že soustavu lze napsat v maticovém tvaru **AX** = **B** , kde **A** je čtvercová řádu **n, X** je matice neznámých typu (n,1) a **B** je matice pravých stran typu (n,1).

Se znalostí maticových rovnic dokážeme rychle vyjádřit z maticové rovnice **X** .

Je **X** = $\mathbf{A}^{-1}$ **B** . Tímto způsobem lze též soustavu se čtvercovou regulární maticí řešit. Vzhledem k tomu, že výpočet inverzní matice je poměrně obtížný, dáváme většinou přednost Gaussově eliminační metodě. Jen pokud bychom měli několik soustav se stejnou maticí soustavy a různými sloupci pravých stran, „vyplatilo“ by se nám vypočítat si inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ a potom jí postupně násobit zleva různé sloupce pravých stran.

Příklad: Řešme soustavu pomocí inverzní matice

$x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$

$2x_1 - x_2 + x_3 = 3$

$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$

Matice soustavy **A** = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. K této matici vytvoříme matici inverzní buď elementárními úpravami nebo pomocí adjungované matice algebraických doplňků – proveďte sami.

Výsledná inverzní matice $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{22} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \\ -3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Provedeme násobení

$$\frac{1}{22} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \\ -3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Řešení můžeme zapsat **X** = $(1, 0, 1)^T$, a zkoušku provedeme obvyklým způsobem - dosazením do všech rovnic. Pokud by bylo pravých stran více, udělali bychom si zkoušku pro správnost inverzní matice, aby byla zaručena její správnost, dříve než jí začneme násobit sloupce pravých stran.

Kapitola 4

Lineární vektorový prostor

4.1. Axiomy obecného lineárního vektorového prostoru

Lineární vektorový prostor je neprázdná množina $\mathbf{M}$ objektů zvaných vektory, která má tyto vlastnosti (axiomy):

1. Ke každým dvěma vektorům $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \mathbf{M}$ je přiřazen právě jeden vektor $\mathbf{S} \in \mathbf{M}$, který se nazývá součet vektorů $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ a píšeme $\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$

2. Ke každému vektoru $\mathbf{A} \in \mathbf{M}$ a ke každému reálnému číslu $c \in R$ je přiřazen právě jeden vektor $\mathbf{V}$, který se nazývá skalární násobek vektoru $\mathbf{A}$, a píšeme

$\mathbf{V} = c\,\mathbf{A}$

3. Sčítání vektorů je komutativní a asociativní, tj. platí

$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$, $\quad \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$

4. Pro násobení vektoru reálným číslem (**skalárem**) platí asociativní zákon, tj. platí $(cd)\,\mathbf{A} = c\,(d\mathbf{A})$, kde $c, d \in \mathbf{R}$.

5. Pro násobení vektoru skalárem platí distributivní zákon, tj. platí

$(c + d)\,\mathbf{A} = c\mathbf{A} + d\mathbf{A}$

$c\,(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$ pro $c, d \in \mathbf{R}$, $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{M}$.

6. Existuje nulový vektor $\mathbf{0}$ takový, že pro každé $\mathbf{A} \in \mathbf{M}$ platí $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$

7. Vždy platí $1.\,\mathbf{A} = \mathbf{A}$, $\quad 0.\,\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Reálná čísla (skaláry) jsou zde značena běžným a vektory tučným písmem. Často lze v literatuře vidět vektory značené malými písmeny se šipkou nad písmenem.

Je-li $\mathbf{M}$ obecná množina bez bližší specifikace, hovoříme o **obecném lineárním vektorovém prostoru**. Pro danou konkrétní množinu $\mathbf{M}$ dostáváme pak konkrétní lineární vektorový prostor neboli **realizaci lineárního vektorového prostoru** .

Další vlastnosti vyplývající z axiomů :

1. Pro každý vektor **A** ∈ **м** existuje opačný vektor **B** pro který je **A** + **B** = **0** .

Tímto opačným vektorem je vektor (-1) . **A** , který značíme **-A** .

Důkaz je snadný. Je **A** + (**-A**) = 1.**A** -1.**A** = (1-1). **A** = 0.**A** = **0**

2.Pro každý skalár c ∈ R je c. **0** = **0** .

Je totiž c.**0** = c. (0.**A**) = (c.0) . **A** = 0.**A** = **0**

3. Je-li c.**A** = **0** , je buď c = 0 nebo **A** = **0** .

Je -li totiž c = 0 jedná se přímo o axiom 7 . Je-li c ≠ 0 , vynásobme vztah c.**A** = **0** skalárem $\frac{1}{c}$. Je pak $\frac{1}{c}$. c **A** = $\frac{1}{C}$. **0** , to znamená

($\frac{1}{C}$. c) **A** = **0** neboli 1 . **A** = **0** , to znamená , že **A** = **0** .

4. Rovnice **X** + **A** = **B** je pro dané vektory **A**, **B** jednoznačně řešitelná. Dané rovnici vyhovuje vektor **X** = **B** + (**-A**), což lze zapsat

X = **B** – **A** . Snadno lze dokázat, že toto řešení je jediné. Předpokládejme, že řešení jsou dvě, označme je $\mathbf{X_1}$ a $\mathbf{X_2}$. Je tedy

$\mathbf{X_1}$ + **A** = **B** a též $\mathbf{X_2}$ + **A** = **B**. Je tedy $\mathbf{X_1}$ + **A** = $\mathbf{X_2}$ + **A** . Přičteme-li k oběma stranám rovnice vektor (**-A**), dostaneme $\mathbf{X_1}$ = $\mathbf{X_2}$ a docházíme ke sporu s předpokladem. Řešení je tedy jediné. Důsledkem je, že v lineárním vektorovém prostoru lze nejen sčítat, ale i odčítat.

Některé realizace lineárního vektorového prostoru:

1. **Lineární vektorový prostor $\mathbf{V_n}$** je prostorem uspořádaných n-tic reálných čísel. Např. vektory tvaru **A** = (1, 2, 3) a **B** = (2, 0, 7) jsou vektory z prostoru $\mathbf{V_3}$. Součet (sčítáme odpovídající si složky) **S** = (3, 2, 10) a skalární násobek

(násobíme skalárem každou složku) 5.**A** = (5, 10, 15) jsou opět vektory z $\mathbf{V_3}$ a další axiomy jsou též splněny – přesvědčte se sami. Nulovým vektorem je zde vektor **0** = (0, 0, 0).

2. **Lineární vektorový prostor reálných funkcí definovaných na intervalu I** - sčítání definujeme obvyklým způsobem (f + g)(x) = f(x) + g(x) a

(c.f)(x) = c. f(x) , c ∈ **R**. Tento prostor označíme **F**(**I**) . Nulovým vektorem je zde konstantní funkce f(x) = 0 na **I**.

3. **Lineární vektorový prostor čtvercových matic řádu n** - sčítání matic a násobení matice skalárem je nám již známo, nulový prvek je nulová matice řádu **n**. Pokuste se ověřit ostatní axiomy.

4. **Lineární vektorový prostor polynomů stupně menšího nebo rovného n** . Polynomy sčítáme běžným způsobem – sčítáme odpovídající si mocniny, násobíme skalárem též běžně – násobíme všechny členy polynomu. Nulový prvek je nulový polynom **P**(x) = 0 .

5. **Lineární vektorový prostor všech polynomů**

Existuje mnoho dalších realizací lineárního vektorového prostoru.

Jako protipříklad se podívejme na **množinu polynomů stupně právě n** . Tato množina **není lineárním vektorovým prostorem**. Není splněn axiom číslo 1 (součet dvou polynomů stupně **n** nemusí být opět stupně **n**), a dále v této množině neexistuje nulový prvek.

Podprostor prostoru $\mathcal{M}$ je množina $\mathcal{M}_1$, která má následující vlastnosti :

1) je neprázdná

2) pro každé dva vektory **X**, **Y** ∈ $\mathcal{M}_1$ je též **X** + **Y** ∈ $\mathcal{M}_1$

3) pro každý vektor **X** ∈ $\mathcal{M}_1$ a každé reálné číslo c ∈ **R** je též c**X** ∈ $\mathcal{M}_1$.

Příklad podprostoru ve $\mathbf{V_3}$ je množina vektorů o třech složkách, jejichž poslední složka je nula. Příkladem podprostoru matic řádu **n** je množina skalárních matic řádu **n**. Lineární prostor všech polynomů i lineární prostor polynomů stupně menšího nebo rovného **n** jsou podprostory prostoru spojitých funkcí na **R**. (Zkuste ověřit, že se skutečně jedná o podprostory).

4.2. Lineární kombinace vektorů, lineární obal, báze, dimenze prostoru

Mějme vektory $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, … , $\mathbf{A_r}$ z lineárního vektorového prostoru **M** . Každý vektor tvaru $\mathbf{A} = c_1\mathbf{A_1} + c_2\mathbf{A_2} + \dots + c_r\mathbf{A_r}$, kde $c_i \in \mathbf{R}$, i = 1,2,…,r , se nazývá **lineární kombinace vektorů** $\mathbf{A_1}$,$\mathbf{A_2}$, … , $\mathbf{A_r}$. Čísla c_i se nazývají **koeficienty** této lineární kombinace.

Jestliže všechna čísla c_i jsou nezáporná, mluvíme o **nezáporné lineární kombinaci**, jsou-li nezáporná a navíc jejich součet je roven jedné, mluvíme o **konvexní lineární kombinaci** daných vektorů.

Tak např. vektor $\mathbf{A} \in \mathbf{V_4}$, $\mathbf{A}$ = (1, 5, 3, 5) je konvexní lineární kombinací vektorů $\mathbf{A_1}$ = (2, 3, 0, 5) a $\mathbf{A_2}$ = (0, 7, 6, 5) , protože je $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{A_1} + \frac{1}{2}\mathbf{A_2}$.

Úloha najít koeficienty lineární kombinace r vektorů z $\mathbf{V_n}$ tak, aby se tato kombinace rovnala danému výslednému vektoru **B**, je vlastně úlohou řešit soustavu n lineárních rovnic pro **r** neznámých c_i, jejíž vektor pravých stran je sloupcový vektor **B**.

Množina všech lineárních kombinací vektorů $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, …, $\mathbf{A_r}$ se nazývá **lineární obal** této množiny vektorů – označíme $\mathbf{L(A_1, A_2, \dots, A_r)}$. Říkáme, že tento **lineární obal je generován vektory $\mathbf{A_1, A_2, \dots, A_r}$** a vektory se nazývají jeho **generátory**.

Mějme opět skupinu vektorů $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, …, $\mathbf{A_r}$. Říkáme, že tyto vektory jsou **závislé**, lze-li jeden z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních. V opačném případě říkáme, že jsou **nezávislé.** Pokud jsou ve skupině vektory nezávislé, hovoříme o lineárně nezávislé skupině vektorů, jsou-li závislé, je skupina vektorů lineárně závislá. Je-li skupina tvořena jediným vektorem, je tento vektor lineárně závislý, právě když je nulový.

Utvořme si lineární kombinaci vektorů $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, …, $\mathbf{A_r}$ tvaru

$c_1\mathbf{A_1} + c_2\mathbf{A_2} + \ldots + c_r\mathbf{A_r}$ a položme ji rovnu nulovému vektoru. Zřejmě k tomu, aby vektory byly nezávislé, je třeba, aby všechny koeficienty c_i v této kombinaci byly rovny nule. Jakmile totiž alespoň jeden koeficient, kupř. c_1, nebude roven nule, můžeme jím celou rovnici vydělit a dostaneme, že příslušný vektor, u nás $\mathbf{A_1}$, je lineární kombinací ostatních. Závislost a nezávislost vektorů budeme zjišťovat pomocí uvedené lineární kombinace.

.

Příklad: Zjistěme, zda následující vektory z vektorového prostoru **F** jsou lineárně závislé nebo lineárně nezávislé. $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = 5x + 2$, $h(x) = 4x + 13$.

Napíšeme si lineární kombinaci $c_1f(x) + c_2g(x) + c_3h(x) = \mathbf{0}$ **,** a zkoumejme, zda všechny koeficienty c_i musí být nutně nulové nebo ne. Porovnáním koeficientů u x a u absolutních členů dostaneme homogenní soustavu lineárních rovnic

$2c_1 + 5c_2 + 4c_3 = 0$

$-3c_1 + 2c_2 + 13c_3 = 0$,

jejíž matice soustavy je $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -3 & 2 & 13 \end{pmatrix}$.

Je zřejmé, že hodnost této matice $h = 2$, ale neznámé jsou tři, tedy máme jeden parametr. Ten lze volit libovolně, takže může být samozřejmě různý od nuly. Naše tři vektory jsou tedy lineárně závislé.

Příklad: Zjistěme, zda v prostoru V_3 jsou lineárně závislé nebo nezávislé vektory

$\mathbf{A} = (1, 2, 8)$, $\mathbf{B} = (3, 4, 5)$, $\mathbf{C} = (4, 6, 2)$ .Napíšeme si lineární kombinaci

$c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{B} + c_3\mathbf{C} = 0$. Rozepíšeme tuto rovnici po složkách a dostaneme soustavu tří rovnic o třech neznámých

$c_1 + 3c_2 + 4c_3 = 0$

$2c_1 + 4c_2 + 6c_3 = 0$

$8c_1 + 5c_2 + 2c_3 = 0$,

jejíž matice soustavy je $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Tuto matici upravíme na Gaussův tvar a zjistíme hodnost.

Je $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ 8 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -19 & -30 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}$ a hodnost matice je tři.

Víme, že pokud je hodnost matice u homogenní soustavy rovna počtu neznámých, existuje pouze triviální řešení. To znamená, že koeficienty v lineární kombinaci jsou nulové a vektory jsou lineárně nezávislé.

Je vidět, že pracujeme-li s prostorem $\mathbf{V_n}$, nemusíme vůbec soustavu rovnic psát a můžeme vytvořit okamžitě matici soustavy tak, že do ní vložíme sloupcové vektory **A**, **B**, **C**. Ale vzhledem k tomu, že $\mathbf{h(A) = h(A^T)}$ není dokonce nutné převádět vektory na sloupcové. Stačí tedy zjišťovat hodnost matice, kterou získáme tak, že napíšeme dané vektory do jednotlivých řádků matice.

Dále je zřejmé, že vynecháme-li ze skupiny lineárně nezávislých vektorů jeden nebo více vektorů, dostaneme opět skupinu lineárně nezávislou. Naopak přidáme-li ke skupině lineárně závislých vektorů jeden nebo více vektorů, dostaneme opět skupinu lineárně závislou.

Mějme nyní skupinu vektorů vektorového prostoru **M**. Tato skupina se nazývá **báze prostoru M,** jestliže je lineárně nezávislá a generuje prostor **M**, tj. lineární obal této skupiny je celý prostor **M.** Říkáme, že **prostor je konečně generovaný,** má-li konečnou množinu generátorů. Lze dokázat, že z každé množiny generátorů konečně generovaného vektorového prostoru **M** lze vybrat konečnou bázi a každé dvě báze mají stejný konečný počet prvků.

Počet prvků libovolné báze vektorového prostoru **M** nazýváme **dimenze M**, značíme **dim M**. Nulový vektorový prostor, (obsahuje pouze nulový vektor, a tedy neobsahuje žádný lineárně nezávislý vektor), má dimenzi 0.

Lineární prostory konečné dimenze tvoří velmi důležitou část lineární algebry a my se budeme nadále věnovat pouze tomuto typu prostorů. Jedním z nich je již zmíněný prostor aritmetických vektorů $\mathbf{V_n}$, jehož prvky jsou uspořádané n-tice reálných čísel. Jak se vektory sčítají a násobí skalárem bylo již výše uvedeno. Bázi tohoto prostoru tvoří **n** lineárně nezávislých vektorů zvaných též **bázické vektory**, jelikož každý další vektor lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci těchto **n** nezávislých vektorů (neznámé koeficienty v lineární kombinaci se počítají ze soustavy **n** rovnic o **n** neznámých s regulární maticí, a tato soustava má jediné řešení).

Příklad: Zjistěme, zda skupina vektorů z $\mathbf{V_4}$ je lineárně závislá nebo nezávislá.

$\mathbf{A_1}$ = (1, 0, 2, 0) , $\mathbf{A}_2$ = (1, 3, 2, 4) , $\mathbf{A_3}$ = (0, 5, 6, 7), $\mathbf{A_4}$ = (1, -2, 0, -3).

Vložíme si vektory do matice a zjistíme hodnost matice.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 2 & 4\\ 0 & 5 & 6 & 7\\ 1 & -2 & 0 & -3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 4\\ 0 & 5 & 6 & 7\\ 0 & -2 & -2 & -3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 18 & 1\\ 0 & 0 & -6 & -1\end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 18 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$. Hodnost matice je rovna čtyřem. Vektory jsou tedy lineárně nezávislé a skupina vektorů je lineárně nezávislá.

Položme si otázku, co je lineárním obalem daných vektorů? Vzhledem k tomu, že dimenze prostoru $\mathbf{V_4}$ je rovna čtyřem a máme čtyři nezávislé vektory, tvoří tyto čtyři vektory bázi prostoru $\mathbf{V_4}$ a jejich lineárním obalem je celý prostor $\mathbf{V_4}$.

Příklad: Zjistěme, zda vektory **A** = (1, 3, 7) , **B** = (1, 4, 6) tvoří bázi prostoru $\mathbf{V_3}$.

Okamžitě vidíme, že vektory nemohou tvořit bázi V_3 , protože jich je málo – báze prostoru musí obsahovat tři vektory. Dále vidíme na první pohled, že vektory jsou nezávislé, jelikož jeden není násobkem druhého. Tyto dva vektory tedy negenerují celý prostor $\mathbf{V_3}$, ale pouze jeho podprostor $\mathrm{P}_{\mathbf{3}}^{\mathbf{2}}$, který má dimenzi rovnou dvěma.

Vezměme si nyní vektor **C** = (2, 7, 13) a ptejme se, zda leží v podprostoru $\mathbf{P}_3^2$ určeném vektory **A**, **B** .

Pokud vektor **C** v tomto podprostoru leží, je lineární kombinací vektorů **A**,**B** , to znamená, že je na nich závislý. Pokud **C** v podprostoru neleží, ale leží v doplňku tohoto podprostoru vzhledem k $\mathbf{V_3}$, musí být na vektorech **A**,**B** nezávislý.

Čili stačí si napsat matici složenou z těchto tří vektorů **A**, **B**, **C** a zjistit její hodnost. Bude-li hodnost rovna dvěma, vektor **C** v podprostoru $\mathbf{P_3^2}$ leží, bude-li hodnost rovna třem, leží vektor **C** v doplňku tohoto podprostoru a je na **A**,**B** nezávislý. Dohromady by pak v takovém případě tyto tři vektory tvořily bázi $\mathbf{V_3}$.

Je $\begin{pmatrix}1 & 3 & 7\\ 1 & 4 & 6\\ 2 & 7 & 13\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 3 & 7\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 3 & 7\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Hodnost této matice je rovna dvěma. To znamená, že vektor **C** leží v podprostoru určeném vektory **A**, **B**

Mějme nyní dva podprostory M_1 a M_2 konečně generovaného lineárního prostoru **V**. Pak množina $\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 = \{\mathbf{A}+\mathbf{B},\ \text{kde } \mathbf{A} \in \mathrm{M}_1, \mathbf{B} \in \mathrm{M}_2\}$ je nejmenším podprostorem obsahujícím M_1 a M_2 a nazývá se **spojení podprostorů M_1 a M_2 .**

Množina $\mathrm{M}_1 \cap \mathrm{M}_2$ **,** která obsahuje vektory ležící v obou podprostorech M_1 **,** M_2 se nazývá **průnik podprostorů** M_1 a M_2 .

Následující tvrzení, známé jako **věta o dimenzi spojení a průniku**, je v lineární algebře a jejích aplikacích velmi důležité:

Mějme dva podprostory M_1 a M_2 lineárního konečně generovaného prostoru **V**. Pak platí

$$\dim(\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2) + \dim(\mathrm{M}_1 \cap \mathrm{M}_2) = \dim \mathrm{M}_1 + \dim \mathrm{M}_2 \quad .$$

Příklad: Mějme dvě skupiny vektorů

$\mathrm{M}_1 = \{(11,7,5),(3,2,1),(5,3,3)\}$, $\mathrm{M}_2 = \{(1,2,3),(5,7,11),(3,3,5)\}$.

Určeme **dim** M_1 , **dim** M_2 , **dim** $(\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2)$, **dim** $(\mathrm{M}_1 \cap \mathrm{M}_2)$.

Z matice $\begin{pmatrix} 11 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 11 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 11 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dostáváme, že

dim $\mathrm{M}_1 = 2$.

Podobně z matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 11 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ rychle dostáváme, že hodnost je opět rovna

dvěma, protože tato matice má oproti naší matici pro M_1 pouze prohozený 1. a 2. řádek, a dále 1. a 3. sloupec, což jsou elementární úpravy, které nemění hodnost matice. Je tedy **dim** $\mathrm{M}_2 = 2$. **dim** $(\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2)$ stanovíme z matice

$\begin{pmatrix} 11 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 11 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, která má minimálně hodnost dvě a maximálně tři. Je

$$\begin{pmatrix} 11 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -8 \\ 0 & 15 & 28 \\ 0 & 42 & 96 \\ 0 & 12 & 40 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 11 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 88 \\ 0 & 0 & 196 \\ 0 & 0 & 88 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 11 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a hodnost matice je tři.

Již víme, že je **dim** $(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2) = 3$. Podle věty o dimenzi spojení a průniku je

$3 +$ **dim** $(\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2) = 2 + 2$, neboli **dim** $(\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2) = 1$.

5.kapitola

Polynomy a racionální lomené funkce

5.1. Násobení a dělení polynomů

Uvažujme **polynom** ve tvaru $\mathbf{P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}$, kde $\mathbf{a_i}$, i = 0, …, n , jsou reálné koeficienty. Říkáme, že tento polynom je **n**-tého stupně. Polynom je uspořádán sestupně od své nejvyšší mocniny. Pokud $\mathbf{a_0} = 1$, nazývá se polynom **normovaný**.

Již bylo výše řečeno, že prostor všech polynomů (mnohočlenů) je podprostorem funkcí spojitých na **R**. S funkcemi lze ale provádět mimo lineární prostor další operace, např. násobení, dělení, skládání funkcí. Některé další operace lze tak provádět i s polynomy, též mimo vektorový prostor, jelikož výsledek může nebo nemusí být prvkem výchozího lineárního vektorového prostoru.

Poznámka: Koeficienty polynomů mohou být i čísla komplexní. My se zde omezíme pouze na koeficienty reálné.

Násobení dvou polynomů se provádí pomocí distributivního roznásobení obou polynomů. Uveďme příklad.

Spočtěme **P(x) . Q(x)** pro polynomy **P(x)** = $3x^3 + 2x - 4$, **Q(x)** = $2x^6 + 4x^4 + x - 1$.

Polynomy si zapíšeme do závorek a násobíme každý člen levého polynomu s ostatními členy pravého polynomu. Toto násobení je zřejmě komutativní, asociativní a distributivní.

$(3x^3 + 2x - 4)(2x^6 + 4x^4 + x - 1) = 6x^9 + 12x^7 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^7 + 8x^5 + 2x^2 - 2x - 8x^6 - 16x^4 - 4x + 4 = 6x^9 + 16x^7 - 8x^6 + 8x^5 - 13x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x + 4$, což je výsledný polynom. Označme ho **T(x)**.

Nyní provedeme dělení polynomu **T(x)** polynomem **P(x)**. Dělení polynomů lze provést pouze v případě, že stupeň dělence je větší nebo roven stupni dělitele. Provádí se následovně: Opět si napíšeme polynomy (uspořádané sestupně od nejvyšší mocniny) do závorek,

$(6x^9 + 16x^7 - 8x^6 + 8x^5 - 13x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x + 4) : (3x^3 + 2x - 4)$

a tážeme se, kolikrát je výraz $3x^3$ obsažen ve výrazu $6x^9$. Konstatujeme, že $2x^6$ krát. Píšeme tedy

$(6x^9 + 16x^7 – 8x^6 + 8x^5 – 13x^4 – 3x^3 + 2x^2 – 6x + 4) : (3x^3 + 2x -4) = 2x^6$
a dále násobíme výrazem $2x^6$ celého dělitele a odečteme výsledek od dělence :

$(6x^9 + 16x^7 – 8x^6 + 8x^5 – 13x^4 – 3x^3 + 2x^2 – 6x +4) : (3x^3 + 2x – 4) = 2x^6$

$\underline{-6x^9 – 4x^7 +8x^6}$

$12x^7 + 8x^5– 13x^4 – 3x^3 + 2x^2 – 6x -4$

Postup opakujeme, neboli tážeme se, kolikrát je obsaženo $3x^3$ ve $12x^7$. Je to $4x^4$ krát, připíšeme vpravo od rovnítka a opět násobíme celého dělitele, odečteme, atd. Provedeme nyní rychleji celé dělení:

$(6x^9 + 16x^7 - 8x^6 + 8x^5 – 13x^4 –3x^3 + 2x^2 – 6x + 4) : (3x^3 + 2x – 4) = 2x^6 + 4x^4 + x - 1$

$\underline{-6x^9 – 4x^7 + 8x^6}$

$12x^7+ 8x^5 – 13x^4 – 3x^3 + 2x^2 – 6x +4$

$\underline{-12x^7 - 8x^5 + 16x^4}$

$3x^4 – 3x^3 + 2x^2 – 6x + 4$

$\underline{-3x^4 – 2x^2 + 4x}$

$-3x^3 – 2x + 4$

$\underline{3x^3 +2x - 4}$

0

Zbytek je nula, tedy dělenec lze dělit dělitelem beze zbytku. Výsledek je vpravo od rovnítka a má tvar, jaký jsme zřejmě očekávali, je to polynom **Q(x).**

Příklad: Dělme polynomy $(x^3 + x^2 –x + 3) : (x^2 – 4)$

$(x^3 + x^2 – x + 2) : (x^2 – 4) = x + 1$

$\underline{-x^3 +4x}$

$\underline{x^2 + 3x + 3}$

$\underline{-x^2 + 4}$

$3x + 7$

Tentokrát máme nenulový zbytek. Výsledek dělení je třeba zapsat ve tvaru
$(x^3 + x^2 - x + 2) : (x^2 - 4) = x + 1 + \frac{3x+7}{x^2-4}$.

5.2. Počet nulových bodů polynomu neboli počet kořenů algebraické rovnice n-tého stupně s reálnými koeficienty, odhad polohy reálných kořenů na číselné ose

Nulové body polynomu, neboli body, kde graf polynomiální funkce **y = P(x)** protne osu **x,** dostaneme řešením rovnice **P(x) = 0**, tj. řešením **algebraické rovnice n-tého stupně** tvaru

$\mathbf{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0}$, kde $\mathbf{a_i}$, i = 0, 1, …, n jsou **reálné** koeficienty.

Řešení této rovnice je snadné pro stupeň **n** = 1 (lineární rovnice) a pro **n** = 2 (kvadratická rovnice). Pro stupeň **n** = 3 sice existují vzorce zvané Cardanovy vzorce, ale jsou složité a dávají složitý tvar výsledku. Pro vyšší stupeň než tři již žádné vzorce podobné vzorci pro kořeny kvadratické rovnice neexistují. Je tedy k řešení třeba přistoupit jiným způsobem.

Všimněme si nejprve kvadratické rovnice. Víme již, že má buď dva různé reálné kořeny, nebo jeden dvojnásobný kořen, nebo při záporném diskriminantu má dva komplexní kořeny, které jsou komplexně sdružené. Bereme-li tedy v úvahu všechny kořeny, jak reálné, tak komplexní, a počítáme-li každý kořen tolikrát, kolik činí jeho násobnost, má kvadratická rovnice vždy dva kořeny. Tento poznatek lze zobecnit pro libovolný stupeň algebraické rovnice.

Počítáme-li každý kořen algebraické rovnice n-tého stupně tolikrát, kolik činí jeho násobnost, má algebraická rovnice n-tého stupně <u>právě n kořenů</u>, které mohou být reálné nebo komplexní. S každým komplexním kořenem má rovnice s reálnými koeficienty též kořen komplexně sdružený. Komplexní kořeny tedy tvoří dvojice a je jich vždy sudý počet.

Jednoduchým důsledkem předchozího je tvrzení:

Každá algebraická rovnice n-tého stupně, kde n je liché číslo, má alespoň jeden reálný kořen.

Otázkou nyní je, jakým způsobem budeme reálné kořeny hledat. Nejprve si uvedeme jednoduchý odhad intervalu, v němž všechny reálné kořeny algebraické rovnice leží.

Odhad polohy reálných kořenů:

Mějme normovanou algebraickou rovnici

$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0.$

Označme **A** = max ($|a_1|$, $|a_2|$, … $|a_n|$). Potom všechny reálné kořeny této rovnice leží v intervalu **< -A-1 , A+1>** .

Dokažme si tento odhad.

Nejprve je třeba si uvědomit známou skutečnost, že je-li $\boldsymbol{\alpha}$ kořenem rovnice P**(x) = 0** , potom **–$\boldsymbol{\alpha}$** je kořenem rovnice P**(-x) = 0** . Je tedy horní odhad reálných kořenů rovnice **P(-x) = 0** roven až na znaménko dolnímu odhadu reálných kořenů rovnice P**(x) = 0**.

Dále předpokládejme, že $x > A+1$, kde A je číslo uvedené v odhadu. Chceme ukázat, že takové číslo x nemůže být kořenem rovnice P**(x) = 0**.

Pro $x > 1$ postupně platí:

$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \geq x^n - Ax^{n-1} - \ldots - A = x^n - A(x^{n-1} + \ldots + x + 1) =$

$x^n - A\,\frac{x^n-1}{x-1} = \frac{1}{x-1}\left[x^n(x-1) - Ax^n\right] = \frac{x^n}{x-1}\,(x--1-A)$. Protože ale je $x > A + 1$,

je výraz v závorce kladný. Protože je $x > 1$ je zlomek $\frac{x^n}{x-1}$ též kladný, a je tedy

$P(x) > 0$. Tím jsme dokázali, že pro libovolné $x > A + 1$ je **P(**x) > 0, a takové x není tedy kořenem rovnice **P(x) = 0** . Číslo A + 1 je tedy horním odhadem reálných kořenů rovnice **P(x) = 0**.

Dolním odhadem reálných kořenů rovnice **P(x) = 0** je, (podle předchozí poznámky na začátku důkazu), horní odhad reálných kořenů rovnice **P(-x) = 0**, tj. rovnice

$x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \ldots + (-1)^n a_n = 0$.

Tato rovnice má však koeficienty v absolutní hodnotě stejné jako původní rovnice. Je tedy horním odhadem reálných kořenů rovnice **P(-x) = 0** opět číslo **A + 1** . To znamená, že dolním odhadem reálných kořenů rovnice **P(x) = 0** je číslo **–A – 1**.

Všechny reálné kořeny rovnice **P(x) = 0** leží tedy v intervalu **< -A-1 , A+ 1 >** .

Nakonec je třeba říci, že existují další odhady pro polohu reálných kořenů rovnice **P(x) = 0**. My se však spokojíme pouze s tímto nejjednodušším.

Příklad: Odhadněte interval, v němž leží všechny reálné kořeny rovnice

$2x^5 – 8x^4 + 7x^3 –x + 3 = 0$.

Nejprve musíme rovnici normovat (dělit dvěma).

Dostáváme rovnici $x^5 – 4x^4 + 3{,}5x^3 – 0{,}5x + 1{,}5 = 0$. Potom je

A = max ($|-4|$, $|3{,}5|$, $|-0{,}5|$, $|1{,}5|$) = 4 . Všechny reálné kořeny (rovnice má buď jeden, tři nebo 5) leží tedy v intervalu $\langle -5, 5\rangle$.

Je třeba si uvědomit, že pokud jsou koeficienty normované rovnice **P(x) = 0** v absolutní hodnotě malé, vyskytují se reálné kořeny této rovnice jen v blízkém okolí bodu **0**.

5.3. Hledání reálných kořenů algebraické rovnice, Hornerovo schema

Nyní máme hotov odhad polohy nulových bodů polynomu, neboli kořenů algebraické rovnice **P(x) = 0**, a chtěli bychom tyto kořeny nalézt.

Pokud má rovnice kořeny celočíselné není jejich nalezení velký problém. V intervalu $\langle -\mathbf{A} - \mathbf{1}, \mathbf{A} + \mathbf{1}\rangle$ si vytvoříme tabulku hodnot v celočíselných bodech a všechny kořeny tak nalezneme. Rovnice může ale mít též reálné kořeny, které celočíselné nejsou. Pak se nám tímto způsobem podaří nalézt jenom některé z reálných kořenů. Jakmile však máme alespoň jeden reálný kořen nalezen, můžeme snížit stupeň rovnice, jelikož platí:

Nechť $\boldsymbol{\alpha}$ je kořenem algebraické rovnice **n**-tého stupně **P(x) = 0**. Potom polynom **P(x)** je dělitelný lineárním dvojčlenem tvaru **x-** $\boldsymbol{\alpha}$, tak zvaným kořenovým činitelem ke kořenu $\boldsymbol{\alpha}$, a platí rovnost **P(x) = (x –** $\boldsymbol{\alpha}$ **). Q(x)** , kde **Q(x)** je polynom stupně **n-1** .

Důsledkem je : Má-li tedy algebraická rovnice **P(x) = 0** všechny kořeny reálné různé, lze ji zapsat ve tvaru $\mathbf{P(x) = a_0 (x - \alpha_1) (x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)}$ **- tj. ve tvaru součinu kořenových činitelů**. Má-li rovnice pouze reálné kořeny ale jsou vícenásobné, součet všech násobností je vždy **n**, a lze psát

$$\mathbf{P(x) = a_0} \, (x-\alpha_1)^{r_1} \, (x-\alpha_2)^{r_2} \dots (x-\alpha_k)^{r_k} \quad \text{, kde } \mathbf{r_1 + r_2 + \dots + r_k = n} \text{ .}$$

Toto tvrzení nebudeme dokazovat.

Nyní nás bude zajímat, jak rychle vytvořit tabulku hodnot pro námi zvolené argumenty. Dosazování do polynomu, zvláště když je vyššího stupně, by bylo jak zpaměti, tak i na kalkulačce poměrně zdlouhavé.

K výpočtu hodnot polynomu nám poslouží tak zvané **Hornerovo schema.**

Mějme polynom **P(x)** $= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ a chceme určit jeho hodnotu v bodě $x = \mathbf{c}$, neboli **P(c)** .

Výpočet provedeme takto: Upravíme polynom uzávorkováním na tvar

P(x) $= (\dots (((a_0x + a_1) x + a_2) x + a_3) x + \dots + a_n)$, a do tohoto tvaru dosadíme číslo **c**.

P (c) $= (\dots(((a_0\mathbf{c} + a_1)\mathbf{c} + a_2) \mathbf{c} + a_3) \mathbf{c} + \dots + a_n)$.

Vypočteme-li postupně čísla $b_0 = a_0$

$$b_1 = a_1 + b_0 \, \mathbf{c}$$

$$b_2 = a_2 + b_1 \, \mathbf{c}$$

$$b_3 = a_3 + b_2 \, \mathbf{c}$$

....

$$b_n = a_n + b_{n-1} \, \mathbf{c} \qquad ,$$

pak je b_n = **P(c)** .

Tento výpočet se organizuje do schématu, které se nazývá **Hornerovo schema**, a je tvaru

	a_0	a_1	a_2	. . .	a_n
c		b_0**c**	b_1**c**	. . .	b_{n-1}**c**
	b_0	b_1	b_2	. . .	b_n = **P(c)** .

Schema sestrojíme tak, že do prvního řádku napíšeme koeficienty daného mnohočlenu **P(x)**, pokud některá z mocnin chybí, píšeme jako koeficient nulu. Na začátek druhého řádku napíšeme číslo **c**, a do třetího řádku číslo $b_0 = a_0$.

Nyní začneme počítat, a druhý řádek s třetím doplňujeme současně. Do druhého řádku píšeme postupně **c** – násobky čísel b_0 , b_1 , … a třetí řádek dostáváme sečtením prvních dvou řádků ve sloupcích.

Příklad: Vypočtěme hodnotu polynomu **P(x)** = $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x - 5$ v bodě **c** = 3

Napoprvé rozepíšeme trochu podrobněji:

	1	-2	3	-2	- 5
3		3.1	3.1	3.6	3.16
	1	-2+3=1	3+3=6	-2+18=16	-5+48 =43

A je tedy **P(3)** = 43 .

Příklad: Určeme hodnotu polynomu **P(x)** = $x^5 + 2x^3 - 3x^2 + x - 1$ v bodě **c** = 2.

	1	0	2	-3	1	-1
2		2	4	12	18	38
	1	2	6	9	19	37

Je **P(2)** = 37 .

Hornerovo schema má pro nás další důležitý význam kromě počítání hodnoty polynomu **P(x)** v daném bodě. Lze též dokázat, že uvedené koeficienty b_0, b_1, …b_{n-1} jsou koeficienty polynomu **Q(x)** stupně **n-1**, pro který platí

P(x) = (x – c) Q(x) + R , a **R =** $\mathbf{b_n}$.

Lineárním dvojčlenem tedy není třeba dělit pomocí dělení uvedeného v **5.1**. , ale daleko rychleji pomocí Hornerova schématu.

Příklad: Proveďme dělení polynomů

$(x^5 - x^4 + 3x^3 - 2x + 1) : (x - 2)$, $x \neq 2$, pomocí Hornerova schématu.

Výsledek hledáme ve tvaru **Q(x) +** $\frac{R}{x-2}$, kde **Q(x)** je polynom stupně čtyři a **R** je zbytek při dělení.

Sestavíme Hornerovo schema pro **c** = 2 :

	1	-1	3	0	-2	1
2		2	2	10	20	36
	1	1	5	10	18	37 = **R** .

Dále je **Q(x)** = $x^4 + x^3 + 5x^2 + 10x + 18$.

Výsledek dělení můžeme tedy zapsat ve tvaru

$$(x^5 - x^4 + 3x^3 - 2x + 1) : (x - 2) = x^4 + x^3 + 5x^2 + 10x + 18 + \frac{37}{x-2} \quad .$$

A nyní již můžeme přistoupit k hledání nulových bodů polynomu, čili řešení algebraické rovnice **n**-tého stupně.

Příklad: Najděme všechny nulové body polynomu

P(x) = $x^5 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 5x - 3$.

Tento polynom je lichého stupně, tedy má jistě alespoň jeden nulový bod – příslušná rovnice má alespoň jeden reálný kořen. Může však mít také 3 nebo 5 reálných kořenů.

Provedeme odhad polohy kořenů. Rovnice **P(x) = 0** je normovaná. A = 5 . Reálné kořeny leží tedy v intervalu $\langle -6, 6 \rangle$. Udělejme si tabulku hodnot v celočíselném argumentu z tohoto intervalu a hodnoty spočítejme Hornerovým schématem. (Spočtěte sami a ověřte tabulku).

Je

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
P(x)	-8325	-3328	-1071	-240	-21	0	-3	-16	-45	0	425	1872	5439

Podařilo se nám tedy najít dva celočíselné kořeny, a to v bodě -1 a v bodě 3.

Podívejme se na příslušné Hornerovo schema pro bod **c**= -1, a snižme stupeň rovnice pomocí kořenového činitele (x + 1). Koeficienty výsledného polynomu, který tvoří levou stranu rovnice, najdeme ve 3.řádku příslušného Hornerova schématu.

Dostáváme rovnici $x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = 0$. Víme, že má dále kořen 3. Vydělme pomocí Hornerova schématu lineárním dvojčlenem (x-3) . Dostáváme

	1	-2	-2	-2	-3
3		3	3	3	3
	1	1	1	1	0

a dostáváme rovnici $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. Opět bychom si mohli udělat celočíselnou tabulku, tentokrát v intervalu $\langle -2, 2\rangle$, který nám dává odhad polohy reálných kořenů, ale zdá se, že snadno uhodneme další celočíselný kořen, a tím je opět -1.

Snížíme tedy dále stupeň dělením lineárním dvojčlenem (x + 1) , opět Hornerem

	1	1	1	1
-1		-1	0	1
	1	0	1	0

a vidíme, že výsledná rovnice se sníženým stupněm je tvaru $x^2 + 1 = 0$.

Tato rovnice již nemá reálné kořeny (je to kvadratická rovnice se záporným diskriminantem). Rovnice má tedy tři reálné kořeny, a to jeden jednonásobný v bodě 3, a jeden dvojnásobný v bodě -1.

Lze ji zapsat ve tvaru součinu kořenových činitelů s tím, že výraz $x^2 + 1$ zůstane samozřejmě nerozložen. Je tedy **P(x)** = $(x + 1)^2 (x - 3) (x^2 + 1) = 0$.

Polynom **P(x)** má tedy dva nulové body, a to -1 a 3.

Pokud má algebraická rovnice reálné kořeny neceločíselné, neobjevíme je přímo v tabulce hodnot celočíselného argumentu pro odhadnutý interval. Potom se kořen hledá na základě **Bolzano -Weierstrassovy věty,** která říká :

Jestliže v krajních bodech intervalu $\langle a, b\rangle$ nabývá spojitá funkce **f(x)** hodnot s opačnými znaménky, tj. **f(a).f(b)** $< \mathbf{0}$, pak existuje v intervalu (a, b) alespoň jeden bod c, pro který je **f(c)** = 0
$[\text{tj. existuje v intervalu } (\mathrm{a}, \mathrm{b}) \text{ alespoň jeden kořen rovnice } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\ ]$.

Důsledkem je následující tvrzení: **je li f(a) . f(b)** $<$ **0, potom v intervalu (a, b) existuje lichý počet reálných kořenů rovnice f(x) = 0. Je-li f(a) . f(b)** $>$ **0, potom leží v intervalu (a, b) buď sudý počet reálných kořenů rovnice f(x) = 0 nebo tato rovnice v intervalu (a,b) nemá reálný kořen. Přitom každý kořen je třeba počítat tolikrát, kolik činí jeho násobnost.**

Příklad**:** Zjistěme počet reálných kořenů rovnice $x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0$

Nejprve provedeme odhad polohy reálných kořenů na číselné ose. A = 3 . Interval, v němž leží všechny reálné kořeny (je buď jeden nebo tři), je interval $\langle -4, 4\rangle$. Udělejme tabulku pro celočíselný argument v tomto intervalu:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	-9	5	7	3	-1	1	15	47	103

Nenašli jsme sice žádný celočíselný kořen, ale vidíme, že změna znaménka funkce **P(x)** nastává v intervalu $\langle -4, -3\rangle$, v intervalu $\langle -1, 0\rangle$ a v intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Vzhledem k tomu, že rovnice je třetího stupně a má tedy tři kořeny, má v každém z těchto intervalů právě jeden reálný kořen a nemá žádné komplexní kořeny.

Dokážeme-li najít intervaly, v nichž leží právě jeden reálný kořen rovnice **P(x) = 0**, říkáme, že jsme provedli separaci reálných kořenů této algebraické rovnice. Separaci samozřejmě nelze provést u vícenásobných kořenů, které jsou na stejném místě. Proto existují metody na odstranění násobnosti kořenů rovnice před jejich hledáním, kterými se zde nebudeme zabývat.

Ani když má rovnice **P(x) = 0** kořeny jednonásobné nemusí se nám vždy podařit uvedeným způsobem reálné kořeny separovat. Důvodem může být, že tabulka není dostatečně „hustá“, a sudý počet reálných kořenů se „ukryje“ v intervalu, kde f(a) . f(b)$>$ 0.

Příklad: Zjistěme počet reálných kořenů rovnice $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$.

Odhad nám říká, že všechny reálné kořeny rovnice (jeden nebo tři) leží v intervalu $\langle -3, 3 \rangle$. Vytvořme tabulku

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	- 14	-2	0	-2	-2	6	28

Vidíme, že jeden kořen je v bodě -1 a druhý reálný kořen je v intervalu (1, 2) což znamená, že rovnice má tři reálné kořeny; ale další interval, kde nastává změna znaménka, nevidíme. Uvědomíme si však, že v intervalu (-2, 2), kde změna znaménka nenastává, a přitom v něm máme již jeden kořen, musí ležet ještě další kořen čili ten třetí, aby počet kořenů v tomto intervalu byl sudý.

Rovnici můžeme vyřešit přesně. Snížíme-li stupeň dělením kořenovým činitelem (x + 1), dostáváme kvadratickou rovnici $x^2 - 2 = 0$, jejíž kořeny jsou $\sqrt{2}$ a -$\sqrt{2}$, které skutečně leží v odhadnutých intervalech.

Daná rovnice má tři reálné kořeny, a to -1, $\sqrt{2}$ a -$\sqrt{2}$.

Pokud je reálný kořen neceločíselný a víme, v jakém intervalu leží, můžeme ho dále zpřesňovat na libovolný žádaný počet desetinných míst. K tomuto účelu existuje více numerických metod, z nichž některé k urychlení postupu používají i průběh funkce **f(x)** v intervalu, kde leží kořen. Nejjednodušší metoda je **metoda půlení intervalu** založená na opakovaném použití Bolzano-Weierstrassovy věty. Interval, který obsahuje reálný kořen se rozpůlí a kořen je pak v té polovině, kde jsou krajní hodnoty s různými znaménky. Postup se opakuje tak dlouho, až je interval obsahující kořen dostatečně úzký a určuje tak kořen s dostatečnou přesností.

Příklad: Metodou půlení intervalu zpřesněme kořen $\boldsymbol{\alpha}$ rovnice

$x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$, leží-li $\boldsymbol{\alpha}$ v intervalu (0, 1) .

Je P(0) = -1 , P(1) = 1. Rozpůlíme interval na intervaly (0, 0,5) a (0,5 , 1).

spočteme P(0,5) $\approx$ -1,19 . Tedy kořen leží v intervalu (0,5 , 1).

Opět rozpůlíme tento interval na intervaly (0,5 , 0,75) a (0,75 , 1).

Spočteme P(0,75) $\approx -0{,}59$. Tedy kořen leží v intervalu (0,75, 1).

P(0,875) $\approx 0{,}59$, kořen je v intervalu (0,75 , 0,875). Nyní lze říci, že kořen $\boldsymbol{\alpha}$ je (zatím velmi přibližně) roven $0{,}8$ nebo můžeme pokračovat v půlení a získat tak další desetinná místa kořene.

5.4. Racionální lomená funkce a její rozklad na parciální zlomky

Racionální lomená funkce je funkce, která je podílem dvou polynomů. Má tedy tvar

f(x) = $\frac{P(x)}{Q(x)}$, kde **P(x)** a **Q(x)** jsou polynomy. Definiční obor funkce **f(x)** je dán podmínkou **Q(x)** $\neq$ **0 .**

Racionální lomená funkce se nazývá **neryze lomená ,** pokud je stupeň polynomu **P(x)** větší nebo roven stupni polynomu **Q(x)**.

Pokud je stupeň polynomu **P(x)** menší než stupeň polynomu **Q(x),** nazývá se funkce **ryze lomená.**

Každou racionální neryze lomenou funkci lze dělením převést na součet polynomu a ryze lomené funkce (viz. příklad na dělení polynomů na konci odstavce **5.1.**).

Příklad: Racionální lomenou funkci **f(x)** = $\frac{x^5+1}{x^3-1}$ převeďme na součet polynomu a funkce ryze lomené.

Provedeme dělení polynomů

$(x^5 + 1) : (x^3 - 1) = x^2$

$\underline{-x^5 + x^2}$

$x^2 + 1$ což je zbytek.

Je tedy **f(x)** = $x^2 + \frac{x^2+1}{x^3-1}$.

Již jsme se zmiňovali o skutečnosti, že každý polynom
Q(x) = $a_0x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ lze vyjádřit jako součin kořenových činitelů s příslušnými násobnostmi a kvadratických trojčlenů, které jsou v reálném oboru nerozložitelné, též se svými násobnostmi, tedy je **Q(x)** =

$$= (x-\alpha_1)^{r_1} \ldots (x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+p_1x+ q_1)^{s_1} \ldots (x^2+p_hx+q_h)^{s_h} \qquad (1)$$

kde α_1 , ... α_k jsou všechny reálné kořeny polynomu **Q(x)**, **r_1, ...,r_k** jsou jejich násobnosti, kvadratické trojčleny nemají kořeny v oboru reálných čísel, **s_1,...s_h** jsou jejich násobnosti, a platí **$r_1 + r_2 + ... + r_k + 2(s_1 + s_2 + ... + s_h) = n$**

Rozložíme-li polynom **Q(x)** ve jmenovateli ryze lomené racionální funkce tímto způsobem, lze ryze lomenou racionální funkci poté rozložit na součet parciálních zlomků, neboli zlomků tvaru

$\frac{\mathbf{A}}{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\alpha})^{\mathbf{r}}}$ nebo $\frac{\mathbf{Bx+C}}{(\mathbf{x}^2+\mathbf{px}+\mathbf{q})^{\mathbf{s}}}$, kde **A,B,C** jsou konstanty a **r,s** jsou přirozená

čísla.

<u>Věta o rozkladu racionální lomené funkce</u>

Je-li f(x)= $\frac{R(x)}{Q(x)}$ **ryze lomená racionální funkce a polynom Q(x) je tvaru (1), existuje jednoznačný rozklad na parciální zlomky tvaru**

$$f(x) = \frac{A_1}{(x-\alpha_1)} + \frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2} + \cdots + \frac{A_{r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}} + \frac{B_1}{(x-\alpha_2)} + \frac{B_2}{(x-\alpha_2)^2} + \cdots + \frac{B_{r_2}}{(x-\alpha_2)^{r_2}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{K_1}{(x-\alpha_k)} + \frac{K_2}{(x-\alpha_k)^2} + \cdots + \frac{K_{r_k}}{(x-\alpha_k)^{r_k}} + \frac{B_1x+C_1}{(x^2+p_1x+q_1)} + \cdots + \frac{B_{s_1}x+C_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + \ldots$$
$$+ \frac{I_1x+J_1}{(x^2+p_hx+q_h)} + \ldots + \frac{I_{s_h}x+J_{s_h}}{(x^2+p_hx+q_h)^{s_h}} .$$

(Každý kořenový činitel se tedy objeví v rozkladu tolikrát, kolik činí násobnost příslušného kořene, a to ve všech mocninách od první mocniny do mocniny rovné násobnosti kořene. Totéž platí pro nerozložitelné kvadratické trojčleny, objeví se v rozkladu tolikrát, kolik činí jejich násobnost, opět ve všech mocninách od první mocniny do mocniny rovnající se násobnosti.)

Příklad: Ryze lomenou funkci $\mathrm{f(x)} = \frac{2x-1}{x^3+x}$ rozložme na parciální zlomky.

Rozložíme jmenovatele. $x^3 + x = x(x^2 + 1)$.

Podle věty o rozkladu racionální lomené funkce je dále

$$\frac{2x-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} .$$

Budeme hledat konstanty A,B,C. Celou rovnici vynásobíme nejmenším společným jmenovatelem a dostáváme

$2x-1 = A(x^2 + 1) + Bx^2 + Cx$. Aby se levá strana rovnice rovnala pravé straně

rovnice, musí platit, že A+B = 0, C=2, A= -1. Odtud snadno dopočítáme, že je

B = 1.

Náš rozklad na parciální zlomky je tedy

$$\frac{2x-1}{x^3+x} = -\frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2+1} \quad .$$

Příklad: Racionální funkci $f(x) = \frac{x^3+2}{x^3+2x^2+x}$ převeďme na součet polynomu a funkce ryze lomené a ryze lomenou funkci rozložme na parciální zlomky:

Nejprve provedeme dělení $(x^3+2) : (x^3 + 2x^2 + x) = 1$

$$\frac{-x^3-2x^2 - x}{-2x^2 - x}$$

Je tedy $f(x) = 1 - \frac{2x^2+x}{x^3+2x^2+x}$.

Budeme rozkládat jmenovatele: $x^3 + 2x^2 + x = x\,(x^2 + 2x + 1) = x\,(x + 1)^2$.

Podle věty o rozkladu na parciální zlomky přísluší racionální ryze lomené funkci rozklad

$$\frac{2x^2+x}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} \quad .$$

Vynásobíme nejmenším společným jmenovatelem a dostáváme

$2x^2 + x = A\,(x+1)^2 + B_1\,x\,(x+1) + B_2\,x$.

Konstanty A, B_1 , B_2 můžeme opět určit z porovnání koeficientů polynomů na obou stranách rovnice, nebo též takto:

Dosadíme si do rovnice reálné kořeny.

Po dosazení kořenu 0 dostáváme 0 = A.

Po dosazení kořenu -1 dostáváme $1 = -B_2$, tedy $B_2 = -1$.

Ještě nemáme B_1. Dosadíme si nyní jakékoliv číslo, a obě již známé konstanty A, B_2 . Dosaďme např.číslo 1:

Dostáváme $3 = 2B_1 - 1$, odtud $2B_1 = 4$ a $B_1 = 2$.

Funkci f(x) můžeme tak zapsat ve tvaru

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \quad .$$

Rozklad na parciální zlomky budeme potřebovat v matematice pro řešení některých integrálů a diferenciálních rovnic.

6. kapitola

Další vlastnosti lineárního vektorového prostoru V_n

6.1. Absolutní hodnota vektoru, jednotkový vektor, skalární součin

Mějme vektor **A** = (a_1 , a_2 , … , a_n) z vektorového prostoru $\mathbf{V_n}$. **Absolutní hodnotou vektoru A** rozumíme kladné reálné číslo

|**A**| = $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$. Tedy např. absolutní hodnota vektoru

A = (1, 2, 4, -2) ∈ $\mathbf{V_4}$ je rovna |**A**| = $\sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{25}$ = 5 .

Vektory, které mají absolutní hodnotu rovnu jedné, se nazývají jednotkové vektory. Příkladem jednotkového vektoru ve $\mathbf{V_4}$ je tak např. vektor

B = $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Dalším příkladem jednotkového vektoru je vektor, který má jednu složku rovnou jedné a ostatní složky rovny nule. Takový vektor se nazývá **základní jednotkový vektor** .

Např. ve $\mathbf{V_3}$ jsou tyto vektory tři, a to $\mathbf{E_1}$ = (1, 0, 0) , $\mathbf{E_2}$ = (0, 1, 0) ,

$\mathbf{E_3}$ = (0, 0,1) . Jsou to vlastně řádkové vektory nacházející se v jednotkové matici **E**. Základní jednotkové vektory jsou nezávislé, to znamená, že **n** základních jednotkových vektorů tvoří bázi prostoru $\mathbf{V_n}$. Tato báze se nazývá **přirozená báze prostoru $\mathbf{V_n}$** .

Skalární součin A.B dvou vektorů z $\mathbf{V_n}$ je reálné číslo $a_1b_1 + a_2b_2 + … + a_nb_n$.

Skalární součin není obecnou vlastností lineárních vektorových prostorů. Lineární vektorové prostory, v nichž není zaveden skalární součin, se nazývají afinní prostory. Prostor $\mathbf{V_n}$ je lineární vektorový prostor se skalárním součinem.

Příklad: Vypočtěme skalární součin vektorů **A** = (1, 0, -3, 2, 5) a

B = (4, 3, 7, 0, -1) z prostoru $\mathbf{V_5}$.

Je **A.B** = 1.4 + 0.3 – 3.7 + 2.0 + 5.(-1) = -22

Pro absolutní hodnotu vektoru **A** platí $|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A}.\mathbf{A}}$, neboli absolutní hodnota vektoru **A** je rovna druhé odmocnině ze skalárního čtverce vektoru **A .**

Dva vektory z $\mathbf{V_n}$ se nazývají **ortogonální,** právě když je **A.B** = 0 .

Všimněme si, že **základní jednotkové vektory jsou navzájem ortogonální**, jelikož skalární součin libovolných dvou od sebe různých je roven nule.

Báze, která je složena z navzájem ortogonálních vektorů, se nazývá **ortogonální báze,** jsou-li navíc všechny vektory jednotkové, mluvíme o **ortonormální bázi .**

Přirozená báze $\langle \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_n \rangle$ je tedy ortonormální báze prostoru $\mathbf{V_n}$.

(Lomené závorky užíváme pro skupinu generátorů tehdy, víme-li, že jsou všechny vektory ve skupině lineárně nezávislé a tvoří tedy bázi buď celého prostoru nebo nějakého jeho podprostoru. Pro vektory v lomených závorkách nemusíme již tedy ověřovat, zda jsou lineárně závislé nebo nezávislé, a tak hledat dimenzi prostoru, který generují).

Poznámka: Již jsme se setkali jak s řádkovými vektory, které jsou vlastně maticemi o jednom řádku, tak se sloupcovými vektory, které můžeme interpretovat jako matice o jednom sloupci. Sloupcový vektor je vlastně transponovaný řádkový vektor. Všechny pojmy, které byly zavedeny pro řádkové vektory, jsou zavedeny analogicky i pro sloupcové vektory. U soustav lineárních rovnic používáme často místo názvu sloupec pravých stran název **sloupcový vektor pravých stran**. Též užíváme název **vektor řešení soustavy lineárních rovnic** (je opět sloupcový).

6.2. Souřadnice vektoru v bázi, matice přechodu

Nechť **ß** = $\langle \mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \dots, \mathbf{A_n} \rangle$ je báze lineárního vektorového prostoru dimenze **n** . Mějme vektor **B** z tohoto vektorového prostoru a je $\mathbf{B} = x_1\mathbf{A_1} + x_2\mathbf{A_2} + \dots + x_n\mathbf{A_n}$. Koeficienty lineární kombinace $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}$ nazýváme souřadnice vektoru **B** v bázi **ß** a píšeme $\mathbf{B}_{ß} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Již bylo vysloveno, že tyto souřadnice jsou určeny jednoznačně ze soustavy **n** rovnic o **n** neznámých s regulární maticí.

Mějme přirozenou bázi **ß** = $\langle \mathbf{E_1}, \mathbf{E_2}, \dots\ \mathbf{E}_n \rangle$. Potom souřadnice vektoru **B** jsou přímo složky tohoto vektoru, neboť je

B = $b_1\mathbf{E_1} + b_2\mathbf{E_2} + \dots + b_n\mathbf{E_n}$ a základní jednotkové vektory mají vždy na příslušném místě jedničku a jejich ostatní složky jsou nuly. I dále budeme souřadnice vektoru chápat vzhledem k přirozené bázi, pokud nebude výslovně řečeno jinak, a název báze u vektoru pak neuvádíme.

Vezměme nyní jinou bázi **ß** = $\langle (1,1,1), (-2,1,0), (3,-2,1) \rangle$. Vzhledem k tomu, že jsou vektory uvedeny v lomených závorkách, je již jasné, že jsou lineárně nezávislé a tvoří tedy bázi $\mathbf{V_3}$. Je dán vektor **B** = (2, 0, 2). Budeme hledat souřadnice vektoru **B** v této nové bázi **ß**.

Vyjádříme vektor **B** jako lineární kombinaci vektorů nové báze **ß** :

$\mathbf{B}_{ß} = x_1\mathbf{B_1} + x_2\mathbf{B_2} + x_3\mathbf{B_3} = x_1\,(1, 1, 1) + x_2\,(-2, 1, 0) + x_3\,(3, -2, 1)$.

Rozepíšeme rovnici po jednotlivých složkách a dostaneme soustavu rovnic

$2 = x_1 - 2x_2 + 3x_3$, $0 = x_1 + x_2 - 2x_3$, $2 = x_1 + x_3$

s rozšířenou maticí $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$. Řešení této soustavy je $\mathbf{X} = (1, 1, 1)^T$,

(přesvědčte se sami), to znamená, že souřadnice vektoru **B** v nové bázi **ß** jsou $\mathbf{B}_{ß} = (1, 1, 1)$.

Výše uvedená soustava rovnic by se též dala řešit pomocí inverzní matice, což by bylo obzvláště vhodné, kdybychom převáděli do nové báze **ß** více vektorů.

Matice **A**, která je maticí soustavy rovnic, je sestavena ze sloupcových vektorů báze **ß** a nazývá se **matice přechodu od báze ß k bázi přirozené.** K této matici **A** najdeme inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$. Vektor řešení, tj. vektor nových souřadnic v bázi **ß**, počítáme ze vztahu $\mathbf{B}_{ß}^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}^{\mathbf{T}}$, kde $\mathbf{B}^{\mathbf{T}}$ je vektor **B** zapsaný jako sloupcový vektor a $\mathbf{B}_{ß}^{\mathbf{T}}$ je sloupcový vektor nových souřadnic. Inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ sestrojená k matici **A** tvořená sloupcovými vektory nové báze **ß** se nazývá **matice přechodu od přirozené báze k bázi ß** .

Příklad: Najděme matici přechodu od přirozené báze k bázi

ß = $\langle (1,1,1), (-2,1,0), (3,-2,1) \rangle$.

Matice **A** složená ze sloupcových vektorů báze **ß** je $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

K této matici najdeme matici inverzní, např. pomocí adjungované matice algebraických doplňků. Je **det A** = 4 (přesvědčte se Sarrusovým pravidlem), a jednotlivé algebraické doplňky jsou

$A_{11} = 1$, $A_{12} = -3$, $A_{13} = -1$

$A_{21} = 2$, $A_{22} = -2$, $A_{23} = -2$

$A_{31} = 1$, $A_{32} = 5$, $A_{33} = 3$.

Je tedy $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, což je hledaná matice přechodu od přirozené báze k bázi **ß** .

Mějme nyní dvě báze **M** a **N**. Matice přechodu od báze **M** k bázi **N** je matice, v jejíchž sloupcích jsou souřadnice vektorů původní báze **M** vzhledem k nové bázi **N**. Označme $\mathbf{X_P}$ vektor v přirozené bázi. Je pak $\mathbf{X_N} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{X_P}$, ale je $\mathbf{X_P} = \mathbf{M}\,\mathbf{X_M}$, a tedy je $\mathbf{X_N} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{M}\,\mathbf{X_M}$. Matice přechodu od báze **M** k bázi N je tedy $\mathbf{N}^{-1}\mathbf{M}$. Podobnou úvahou dostaneme, že matice přechodu od báze **N** k bázi **M** je $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$.

Pomocí elementárních úprav realizujeme matici přechodu takto:
$(\mathbf{M}|\mathbf{N}) \sim \ldots \sim (\mathbf{E}|\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})$, případně $(\mathbf{N}|\mathbf{M}) \sim \ldots \sim (\mathbf{E}|\mathbf{N}^{-1}\mathbf{M})$ **.**

Příklad: Najděme matici přechodu od báze **B** = <(1, 3, 2),(0, 1, 3), (2, -1, 7)> k bázi **C** = <(1, 0, 1), (1, -3, 0), (1, 2, 5)> .

Sestrojme matici $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right)$ a upravujme ji takovými elementárními úpravami, aby vlevo vznikla matice jednotková. Je (spočtěte sami) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{8}{5} \end{array}\right)$, a tedy matice přechodu od báze **B** k bázi **C** je matice

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 & -5 & -5 \\ -5 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} .$$

6.3. Lineární prostor řešení homogenní soustavy rovnic

Vraťme se k homogenní soustavě lineárních rovnic, kterou můžeme psát ve tvaru **AX = 0** . Již jsme poznali, že tato soustava je vždy řešitelná (Frobeniova podmínka řešitelnosti je vždy splněna). Pokud má soustava pro **n** neznámých

hodnost **h(A)** = **n**, má pouze triviální řešení; pokud je hodnost matice A menší než **n,** pak má nekonečně mnoho řešení.

Ukažme si nyní, že množina všech řešení homogenní soustavy, pro niž je **h(A)** $<$ **n,** tvoří netriviální lineární vektorový prostor, který je podprostorem **n**-dimenzionálního vektorového prostoru $\mathbf{V_n}$.

Již víme, že množina řešení obsahuje nulový prvek (je jím nulový vektor). Stačí ukázat, že pro dvě různá řešení **X**, **Y** je též řešením jejich součet **X + Y** , a že pro libovolné c ∈ **R** je též c**X** řešením soustavy.

Mějme dvě různá řešení **X** a **Y** . Platí pro ně zřejmě **AX** = **0** a **AY** = **0** .

Podle pravidel pro násobení matic je zřejmé, že **A(X+Y)** = **AX** + **AY** = **0** + **0** = **0** a též je **A**(c**X**) = c.(**AX**) = c.**0** = **0** .

Je tedy řešením soustavy jak vektor **X+Y** , tak vektor c**X**.

Řešení homogenní soustavy lineárních rovnic tvoří lineární vektorový prostor, který je netriviální, pokud h(A) $<$ n .

Jaká je jeho dimenze? Víme, že počet volitelných parametrů homogenní soustavy rovnic je roven číslu **p** = **n** – **h(A)**.

Pokud za těchto **p** parametrů dosazujeme postupně základní jednotkové vektory z $\mathbf{V_p}$ dostaneme jistě **p** lineárně nezávislých vektorů. Každá další volba už je lineární kombinací těchto **p** lineárně nezávislých vektorů, čili **p** je maximální počet lineárně nezávislých vektorů. **Dimenze prostoru řešení je p = n – h(A).** Bázi tohoto prostoru tvoří vektory, které obdržíme dosazením základních jednotkových vektorů z $\mathbf{V_p}$ do obecného řešení.

Další důležitou vlastností je, že **řešení homogenní soustavy je ortogonální k řádkovým vektorům matice soustavy A.** Je tomu tak proto, že skalární součin jednotlivých řádků s libovolným řešením soustavy je nula (vektor pravých stran je nulový).

Příklad: Najděme bázi prostoru řešení homogenní soustavy

$x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0$
$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$
$4x_1 + 3x_2 + 11x_3 - 5x_4 = 0$
$3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0$.

Napišme si matici soustavy a upravujme na Gaussův tvar:

Je $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 11 & -5 \\ 3 & -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -5 & -5 & 7 \\ 0 & -5 & -5 & 7 \\ 0 & -10 & -10 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -5 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Je **h(A)** = 2 , soustava má

nekonečně mnoho řešení závislých na dvou parametrech, jelikož je **p** = **n** – **h(A)** = 4 – 2 = 2.

Řešení homogenní soustavy tvoří tedy podprostor $\mathbf{P}_4^2$ prostoru $\mathbf{V_4}$ **.** Jeho bázi dostaneme z obecného řešení, které je tvaru

$X^T = \left(\frac{\mathbf{x}_4 - 10\mathbf{x}_3}{5}\ ,\ \frac{7\mathbf{x}_4 - 5\mathbf{x}_3}{5},\ x_3\ , x_4\right)$, kde x_3, $x_4 \in \mathbf{R}$ jsou libovolné. (Přesvědčte se sami).

Bázi prostoru řešení tvoří vektory $\mathbf{B_1} = (-2, -1, 1, 0)^T$ - za parametry (x_3 , x_4) jsme dosadili dvojici (1, 0)

a $\mathbf{B_2} = (1, 7, 0, 5)^T$ – za parametry (x_3 , x_4) jsme dosadili dvojici (0, 1) a vektor jsme vynásobili pěti, abychom ho zbavili zlomků.

Báze podprostoru $\mathbf{P}_4^2$ je tedy $\langle(-2, -1, 1, 0)^T, (1, 7, 0, 5\ )^T\rangle$.

Všechna řešení homogenní soustavy jsou lineárními kombinacemi vektorů této báze, tedy je

$\mathbf{X} = x_3 \,.\, (-2, -1, 1, 0)^T + x_4 \,.(1, 7, 0, 5)^T$.

6.4. Vztah mezi řešením homogenní a nehomogenní soustavy lineárních rovnic se stejnou maticí soustavy

Nehomogenní soustava nemá triviální řešení, její řešení tedy netvoří lineární vektorový prostor (chybí nulový prvek). Lze ale snadno dokázat, že libovolné řešení nehomogenní soustavy lze vyjádřit pomocí báze podprostoru řešení homogenní soustavy a jednoho konkrétního řešení nehomogenní soustavy.

Množinu řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic lze vyjádřit jako součet jednoho libovolného řešení nehomogenní soustavy a obecného řešení homogenní soustavy se stejnou maticí A.

Příklad: Najděme řešení nehomogenní soustavy

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5 \\ 4x_1 + 3x_2 + 11x_3 - 5x_4 &= 13 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 6\ . \end{aligned}$$

Využijme minulého příkladu, kde jsme řešili homogenní soustavu se stejnou maticí soustavy. Stačí najít zkusmo jedno řešení naší soustavy – je to $(1, 1, 1, 1)^T$, a již můžeme psát obecné řešení naší nehomogenní soustavy:

$\mathbf{X} = (1, 1, 1, 1)^T + x_3 \,.\, (-2, -1, 1, 0)^T + x_4 \,.\, (1, 7, 0, 5)^T$.

(Pokud vyřešíte tento příklad pomocí elementárních úprav rozšířené matice, nemusí vyjít výsledek ve stejném tvaru. Uvědomte si, že jsme jedno konkrétní řešení soustavy vybrali zcela náhodně a druhý vektor báze jsme násobili v minulém příkladu pěti. Ale zkouška dosazením vás přesvědčí, že je v obou případech řešení správné).

6.5. Ortogonalizace vektorů báze, ortogonální doplněk

Skupina vektorů, které jsou navzájem ortogonální, je skupina lineárně nezávislá. Máme-li tedy n ortogonálních vektorů ve $\mathbf{V_n}$, generují tyto vektory celý prostor $\mathbf{V_n}$ a tvoří jeho bázi. Máme-li ve $\mathbf{V_n}$ ortogonálních vektorů **p**, $\mathbf{p} < \mathbf{n}$, generují tyto vektory podprostor $\mathbf{P_n^p}$ dimenze **p** v prostoru $\mathbf{V_n}$ a tvoří jeho bázi.

Od libovolné skupiny lineárně nezávislých vektorů lze přejít k ortogonální skupině vektorů pomocí **ortogonalizace** .

Algoritmus ortogonalizace

Nechť $\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \ldots, \mathbf{X_k}$ je skupina lineárně nezávislých vektorů. Skupinu $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}, \ldots, \mathbf{Y_k}$ ortogonálních vektorů najdu takto:

$\mathbf{Y_1} = \mathbf{X_1}$

$\mathbf{Y_2} = \mathbf{X_2} + c_{21}\mathbf{Y_1}$ při podmínce $\mathbf{Y_2}.\ \mathbf{Y_1} = 0$

.....

$\mathbf{Y_k} = \mathbf{X_k} + c_{k1}\mathbf{Y_1} + c_{k2}\mathbf{Y_2} + \dots\ c_{k,k-1}\mathbf{Y_{k-1}}$ při podmínkách $\mathbf{Y_k}\ .\ \mathbf{Y_{k-1}} = 0, \dots, \mathbf{Y_k}\ .\ \mathbf{Y_1} = 0$.

Příklad: Zortogonalizujme skupinu $\mathbf{X}_1 = (3, 2, 0)$, $\mathbf{X_2} = (4, 3, 1)$.

Postupujme podle algoritmu. Bude $\mathbf{Y_1} = (3, 2, 0)$. $\mathbf{Y_2} = (4, 3, 1) + k\ .\ (3, 2, 0)$, přičemž je $\mathbf{Y_1}\ .\ \mathbf{Y_2} = 0$.

$0 = \mathbf{Y_1}\ .\ \mathbf{Y_2} = \mathbf{Y_1}\ .\ (\mathbf{X_2} + k\,\mathbf{Y_1}) = \mathbf{Y_1}.\ \mathbf{X_2} + k\ .\ \mathbf{Y}_1^2$, a odtud dostáváme, že $k = -\frac{\mathbf{Y}_1.\mathbf{X}_2}{\mathbf{Y}_1^2}$.

Je $\mathbf{Y_1}.\ \mathbf{X_2} = 12 + 6 + 0 = 18$, $\mathbf{Y}_1^2 = 9 + 4 + 0 = 13$, $k = -\frac{18}{13}$.

Je tedy $\mathbf{Y_2} = (4, 3, 1) - \frac{18}{13}(3, 2, 0) = \left(-\frac{2}{13}, \frac{3}{13}, 1\right)$. Získané dva vektory tvoří ortogonální bázi podprostoru dimenze 2 v prostoru $\mathbf{V_3}$.

Ortogonální báze je tedy $<$ (3, 2, 0), (-2, 3, 13)$>$, kde jsme druhý vektor vynásobili třinácti, abychom ho zbavili zlomků.

Příklad: Zortogonalizujme bázi $<$ (3, 2, 0), (4, 3, 1), (0, 1, 1) $>$.

Použijeme minulý příklad a víme, že $\mathbf{Y_1} = (3, 2, 0)$, $\mathbf{Y_2} = (-2, 3, 13)$.

$\mathbf{Y_3} = (0, 1, 1) + k_1\ .\ \mathbf{Y_1} + k_2\ .\ \mathbf{Y_2}$, přičemž je $\mathbf{Y_1}\ .\ \mathbf{Y_3} = 0$ a $\mathbf{Y_2}\ .\ \mathbf{Y_3} = 0$.

$0 = \mathbf{Y_1}\ .\ \mathbf{Y_3} = \mathbf{Y_1}\ .\ \mathbf{X_3} + k_1\mathbf{Y_2}\mathbf{Y_1} + k_2\mathbf{Y_2}\mathbf{Y_2}$. Ale prostřední sčítanec je roven nule, takže je $k_1 = -\frac{\mathbf{Y}_1.\mathbf{X}_3}{\mathbf{Y}_1^2}$. A spočítáme, že $k_1 = -\frac{2}{13}$

Podobně dostaneme též $k_2 = -\frac{\mathbf{Y}_2.\mathbf{X}_3}{\mathbf{Y}_2^2}$. Je pak $k_2 = -\frac{8}{91}$.

$\mathbf{Y_3} = (0, 1, 1) - \frac{2}{13}(3, 2, 0) - \frac{8}{91}(-2, 3, 13) = \left(-\frac{26}{91}, \frac{39}{91}, -\frac{13}{91}\right)$, a my můžeme vzít vektor vynásobený sedmi, který bude

bez zlomků, a to vektor (-2, 3, 1).

Ortogonální báze je tedy $<(3, 2, 0), (-2, 3, 13), (-2, 3, -1)>$. Pro veďte sami zkoušku, že vektory jsou skutečně navzájem ortogonální.

Obecně pro skupinu o s vektorech lze vektor Y_i vyjádřit takto: $Y_i = X_i + \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{k}_{ij} \,.\, \mathbf{Y}_j$, kde $k_{ij} = -\frac{\mathbf{Y}_j.\mathbf{X}_i}{\mathbf{Y}_j^2}$ pro i= 1, …., s , j = 1, … i-1 .

Mějme nyní libovolnou podmnožinu **M** prostoru $\mathbf{V_n}$. Pak množina

$\mathrm{M}^{\perp} = \{\mathbf{V} \in \mathbf{V_n}, \ \mathbf{V} \,.\, \mathbf{U} = 0 \text{ pro každé } \mathbf{U} \in \mathrm{M}\}$ se nazývá **ortogonální doplněk množiny M.**

Pro ortogonální doplněk platí, že **dim (M +** $\mathrm{M}^{\perp}$**)** = **dim** $\mathbf{V_n}$ = **n ,** tedy podle věty o spojení a průniku je **M** ∩ $\mathrm{M}^{\perp}$ prázdná množina a je **dim** $\mathrm{M}^{\perp}$ = **n – dim M** .

Již jsme konstatovali, že všechna řešení homogenní soustavy jsou ortogonální k množině řádkových vektorů této soustavy, tvoří tedy tato řešení ortogonální doplněk k množině řádkových vektorů soustavy.

Příklad: Najděme ortogonální doplněk k podprostoru **W** danému generátory

$\mathbf{A_1}$ = (1, 2, 1, 2), $\mathbf{A_2}$ = (2, 3, 1, 0) $\mathbf{A_3}$ = (3, 0, 2, 1) ve $\mathbf{V_4}$.

Nejprve zjistíme dimenzi podprostoru: Je $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & -6 & -1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 19 \end{pmatrix}$, a je tedy dimenze podprostoru **W**

rovna třem. Musí tedy být dim $\mathbf{W}^{\perp}$ = 1, to znamená, že ortogonální doplněk je generován jedním vektorem, který tvoří jeho bázi. Označme ho **B**.

Zvolíme ho ve tvaru (x, y, -19, 5) , protože pak jistě platí $\mathbf{A_3}$ **. B** = 0 .

Dále má být $\mathbf{A_2}$ **. B** = 0, tedy (0, 1, 1, 4) . (x, y, -19, 5) = 0 , a odtud je y – 19 + 20 = 0, takže y = -1.

Nakonec má být $\mathbf{A_1}$ **. B** = 0, tedy (1, 2, 1, 2) . (x, -1, -19, 5) = 0 , a odtud je

x - 19 + 10 = 0, a je x = 11 .

Ortogonální doplněk $\mathbf{W}^{\perp}$je tedy určen bázickým vektorem **B** = (11, -1, -19, 5) a leží v něm všechny násobky tohoto vektoru **B**.

Příklad: Najděme ortogonální doplněk k prostoru generovanému vektory $\mathbf{E_1}$ = (1, 0, 0),

$\mathbf{E_2}$ = (0, 1, 0) , $\mathbf{E_3}$ = (0, 0, 1) ve $\mathbf{V_3}$.

Vektory $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$ a $\mathbf{E_3}$ jsou základní jednotkové vektory, které tvoří přirozenou bázi $\mathbf{V_3}$. Generují tedy celý prostor. Ortogonální doplněk má proto dimenzi 0, a tvoří jej jediný vektor, a to nulový.

Příklad: Najděme ortogonální doplněk k podprostoru **W** generovanému vektory

$\mathbf{A_1}$ = (1, 1, 1, 1) , $\mathbf{A_2}$ = (2, 1, 1, 2) , $\mathbf{A_3}$ = (1, 0, 0, 1) ve $\mathbf{V_4}$.

Je $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a hodnost matice je dvě, takže dim **W** = 2.

Musí tedy též být dim $\mathbf{W}^{\perp}$= 2 , a musíme najít dva bázické vektory $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$.

Zvolme je ve tvaru $\mathbf{B_1}$ = (x, y, 1, 0) a $\mathbf{B_2}$ = (z, t, 0, 1). Tím jsme zajistili jejich lineární nezávislost. Dále již stejným způsobem jako v předchozím příkladu dostaneme

(x, y, 1, 0) . (0, 1, 1, 0) = 0, a odtud je y = -1, a (x, -1, 1, 0) . (1, 1, 1, 1) = 0, a odtud je

x = 0 .

podobně (z, t, 0, 1) . (0, 1, 1, 0) = 0 , a je t = 0, a (z, 0, 0, 1) . (1, 1, 1, 1) = 0, a je z = -1

Báze ortogonálního doplňku $\underline{\mathbf{W}^{\perp}}$ je tedy $\langle (0, -1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1) \rangle$. Všechny vektory ortogonálního doplňku jsou pak lineárními kombinacemi dvou bázických vektorů.

Kapitola 7

Vlastní čísla a vlastní vektory matice

7.1. Vlastní čísla a vlastní vektory, vlastnosti

V některých ekonomických a elektrotechnických aplikacích a při řešení mnoha úloh numerické matematiky má zvláštní důležitost řešení soustavy **AX** = λ**X** , kde **A** je čtvercová matice řádu **n** a **λ** je reálné číslo. Jedná se vlastně o situaci, kdy vektor řešení je násobkem vektoru pravých stran. Vektor nulový splňuje tuto rovnici zřejmě. Nenulový vektor, který má tuto vlastnost, se nazývá **vlastní (charakteristický) vektor matice A** a příslušné **λ** se nazývá **vlastní (charakteristické) číslo matice A**.

Soustavu **AX** = **λX** lze přepsat ve tvaru (**A – λE**). **X** = **0** s maticí soustavy

A – λE . Soustava je zřejmě homogenní, a aby existovalo jiné než triviální řešení, musí být matice soustavy singulární. Tedy musí platit

det (A – λE) = 0 . Tato poslední rovnice se nazývá charakteristická rovnice matice **A** a matice (**A – λE**) se nazývá charakteristická matice matice **A.**

det (A – λE) je charakteristický polynom matice **A** .

Řešením charakteristické rovnice získáme kořeny charakteristického polynomu – vlastní čísla matice **A** , která mohou být jednonásobná nebo vícenásobná, reálná nebo komplexní. Množina všech vlastních čísel matice **A** se nazývá **spektrum matice A** a **max** $(|\boldsymbol{\lambda_1}|, |\boldsymbol{\lambda_2}|, \dots, |\boldsymbol{\lambda_n}|)$ se nazývá **spektrální poloměr matice A** a značí se $\rho(\mathrm{A})$.

Příklad: Najděme vlastní čísla matice **A** ,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sestrojíme charakteristickou rovnici det (**A – λE**) = $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix}$ = 0 .

Spočteme determinant, dostaneme $(1-\lambda)^2 = 0$, a tuto rovnici řešíme.

Je $1 - 2\lambda + \lambda^2 = 0$, tedy $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, a kořeny jsou $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$, což

jsou vlastní čísla matice **A** . Spektrální poloměr $\rho(\mathbf{A}) = 3$.

Vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu vypočteme tak, že dosadíme vlastní číslo do homogenní soustavy (**A** – **λE**) = **0** a tuto soustavu řešíme.
Pokračujme v našem příkladu:

Pro vlastní číslo λ_1 = 3 dostaneme **A** – **λE** $= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dostáváme, že $2x_1 = x_2$. Takových vektorů je nekonečně mnoho, my vybereme jeden z nich, který je jejich bázickým vektorem (tvoří bázi všech ostatních), a nazveme ho vlastním vektorem $\mathbf{V}_{\lambda_1} = (1, 2)^T$. Ostatní řešení jsou pak jeho násobkem. Tento vektor $\mathbf{V}_{\lambda_1}$ je vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu λ_1.

Podobně pro vlastní číslo $\lambda_2 =$ -1 dostáváme $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a je

$2x_1 = -x_2$. Vlastní vektor je pak tvaru $\mathbf{V}_{\lambda_2} = (1, -2)^T$.

Z vlastností řešení homogenní soustavy je zřejmé, že je-li hodnost matice

(**A – λE**) rovna **h**, pak k vlastnímu číslu **λ** přísluší (**n – h**) lineárně nezávislých vlastních vektorů.

Lze dokázat, že počet lineárně nezávislých vlastních vektorů odpovídajících jednomu vlastnímu číslu není větší než je násobnost tohoto vlastního čísla v charakteristickém polynomu. Jsou-li tedy vlastní čísla jednonásobná, odpovídá každému vlastnímu číslu právě jeden vlastní vektor.

Násobnost vlastního čísla jako kořene charakteristického polynomu se nazývá **aritmetická násobnost vlastního čísla** a počet vlastních vektorů příslušných k tomuto vlastnímu číslu je **geometrická násobnost vlastního čísla.** Geometrická násobnost vlastního čísla je vždy menší nebo rovna jeho aritmetické násobnosti a pro jednonásobná vlastní čísla se obě násobnosti rovnají jedné.

Ukážeme si na příkladě, jak se pro určitou aritmetickou násobnost může geometrická násobnost lišit. Mějme tři matice

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

det $(\mathbf{A}_1 - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\boldsymbol{\lambda})^3 = 0$, a tedy je $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Aritmetická násobnost vlastního čísla 2 je rovna třem.

Charakteristická matice je $(\mathbf{A}_1 - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{E}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Hodnost této matice je 0 a počet vlastních vektorů je 3 – 0 = 3. Geometrická násobnost vlastního čísla je rovna třem.

det $(\mathbf{A}_2 - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\boldsymbol{\lambda})^3 = 0$, a opět je $\boldsymbol{\lambda}_1 = \boldsymbol{\lambda}_2 = \boldsymbol{\lambda}_3 = 0$ a aritmetická násobnost vlastního čísla je rovna třem.

Charakteristická matice je $(\mathbf{A}_2 - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{E}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Hodnost této matice je 1 a počet vlastních vektorů je 3 – 1 = 2. Geometrická násobnost vlastního čísla je rovna dvěma.

A konečně det $(\mathbf{A}_3 - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\boldsymbol{\lambda})^3 = 0$, a je $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ a aritmetická násobnost vlastního čísla je rovna třem.

Charakteristická matice je $(\mathbf{A}_3 - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{E}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Hodnost této matice je 2. Počet vlastních vektorů je 3- 2 = 1. Geometrická násobnost vlastního čísla je rovna jedné.

Další důležité vlastnosti vlastních čísel:

Označme $\mathbf{u}_i$ aritmetickou násobnost i-tého vlastního čísla. **s** je počet

vlastních čísel matice řádu **n**. Pak platí

1) $u_1 + u_2 + \ldots + u_s = \mathbf{n}$ (**součet násobností vlastních čísel je roven řádu matice**).

2) $u_1.\lambda_1 + u_2\lambda_2 + \cdots + u_s\lambda_s = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ = **st A -- stopa matice A**

3) $\lambda^{u_1} . \lambda^{u_2} . \ldots .\lambda^{u_s} =$ **det A** (**součin vlastních čísel umocněných na své násobnosti je roven determinantu matice A**) .

4) Vlastní vektory příslušné k různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé

Důsledkem vlastnosti 4) zřejmě je, že má-li matice **A** jednonásobná reálná vlastní čísla, existuje n lineárně nezávislých reálných vlastních vektorů, a tedy existuje báze prostoru $\mathbf{V}_n$ složená z těchto vlastních vektorů. Aby existovala báze $\mathbf{V}_n$ složená z vlastních vektorů, nemusí být nutně vlastní čísla jednonásobná, stačí když se geometrická násobnost všech vlastních čísel rovná jejich aritmetické násobnosti.

7.2. Podobnost matic

Matice B je podobná matici A , existuje-li regulární matice **C** taková, že

$\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{C}$.

Říkáme, že matice **B** vznikla z matice **A** podobností transformací určenou maticí **C**.

Podobnostní transformace má tyto vlastnosti:

1) Je-li $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{C}$ je též $\mathbf{A} = \mathbf{C}\,\mathbf{B}\,\mathbf{C}^{-1}$ (je-li **B** podobná **A**, je též **A** podobná **B**)

2) $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_1 \mathrm{C} + \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_2 \mathbf{C} + \ldots + \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_m\mathbf{C} = \mathbf{C}^{-1}(\mathrm{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \ldots + \mathbf{A}_m)\,\mathbf{C}$
(podobnostní transformace součtu matic je rovna součtu podobnostních transformací sčítanců)

3) $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_1 \mathbf{C}\ .\ \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_2 \mathbf{C} \ldots\ .\ \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_m \mathbf{C} = \mathbf{C}^{-1}\,(\mathbf{A}_1.\mathbf{A}_2.\ \ldots\ .\mathbf{A}_m)\,\mathbf{C}$ (podobnostní transformace součinu je rovna součinu podobnostních transformací činitelů)

4) Podobné matice mají stejné charakteristické mnohočleny, a tedy stejná vlastní čísla

Tato vlastnost vyplývá z vlastností předchozích. Je totiž

$\mathbf{det}\,(\mathrm{B} - \boldsymbol{\lambda}\mathrm{E}) = \det\,(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{C} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{E}) = \mathbf{det}\,(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{C} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{E}\,\mathbf{C}) =$

$\mathbf{det}\,(\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{E})\,\mathbf{C}) = \mathbf{det}\,\mathbf{C}^{-1}\,.\,\mathbf{det}\,(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{E})\,.\,\mathbf{det}\,\mathbf{C} = \mathbf{det}\,(\mathbf{C}^{-1}.\mathbf{C})\,.\mathbf{det}(\mathbf{A}- \boldsymbol{\lambda}\mathbf{E}) =$
$\mathbf{det}\,\mathbf{E}\,.\,\det\,(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{E}) = \mathbf{det}\,(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{E})$.

5) $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} = (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{C})^{-1}$ (Podobnostní transformace inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ je rovna inverzní matici k podobnostní transformaci původní matice **A**)

Je totiž $(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{C})^{-1} = ((\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}).\,\mathbf{C})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\,.\,(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}.\,\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{C}$.

Vlastnost podobnosti rozkládá prostor matic řádu n na podobnostní třídy. Zástupcem podobnostní třídy je vybraná matice, která se nazývá Jordanův kanonický tvar. Jedním z Jordanových kanonických tvarů je kanonický diagonální tvar -matice **D**, která má v diagonále vlastní čísla matice. Jak již víme, jsou vlastní čísla podobných matic stejná. Tento kanonický diagonální tvar existuje pro takové matice, které mají **n** lineárně nezávislých vlastních vektorů. Označíme-li matici sloupcových vlastních vektorů **V**, je pak
$\mathbf{D} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{V}$.

Příklad: Najděme matici B, která vznikne z matice A podobnostní transformací určenou maticí T a ověřme vlastnosti podobných matic.

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ **.** Najdeme si nejprve $\mathbf{T}^{-1}$. Je $\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Je tedy $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$

st A $=$ **st B** $= 4$

det A $=$ **det B** $= 4$

det (A-λE) $= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$ a vlastní čísla jsou $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

det (B – λE) $= \begin{vmatrix} 8-\lambda & 9 \\ -4 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$ a je $(8-\boldsymbol{\lambda}).(-4-\boldsymbol{\lambda}) + 36 = 0$, to znamená $(-32) + 4\boldsymbol{\lambda} - 8\boldsymbol{\lambda} + \lambda^2 + 36 = 0$, což je po úpravě $\lambda^2 - 4\boldsymbol{\lambda} + 4 = 0$, neboli $(\boldsymbol{\lambda} - 2)^2 = 0$, což je stejný charakteristický mnohočlen jako pro matici **A** a vlastní čísla jsou opět $\boldsymbol{\lambda}_1 = \boldsymbol{\lambda}_2 = 2$.

Příklad: Najděme Jordanův kanonický tvar pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$:

Je **det** (**A**- **λE**) $= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ -1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (1-\boldsymbol{\lambda}).(6-\boldsymbol{\lambda}) + 4 = 0$, neboli

$\lambda^2 - 7\boldsymbol{\lambda} + 10 = 0$, a odtud je $\boldsymbol{\lambda}_1 = 5$, $\boldsymbol{\lambda}_2 = 2$.

Charakteristická matice pro $\boldsymbol{\lambda}_1$ je $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ a její hodnost je 1.

Vlastní vektor $\mathbf{V}_1 = (1, 1)^T$.

Charakteristická matice pro $\boldsymbol{\lambda}_2$ je $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ a její hodnost je opět 1.

Vlastní vektor $\mathbf{V}_2 = (4, 1)^T$.

Matice **V** je matice $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, a matice k ní inverzní $\mathbf{V}^{-1}$ je $\frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Provedeme násobení $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left(\frac{-1}{3}\right) =$

$\begin{pmatrix} 5 & -20 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left(\frac{-1}{3}\right) = \left(\frac{-1}{3}\right) \begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{D}$.

Přesvědčte se sami, že pro matice z minulého příkladu neexistuje kanonický diagonální tvar, jelikož vlastní číslo je dvojnásobné a geometrická násobnost není rovna aritmetické násobnosti. Tyto matice mají pak poněkud jiný kanonický tvar.

7.3. Spektrální vlastnosti symetrických matic

Spektrální vlastnosti symetrických matic jsou velmi významné pro některé oblasti matematiky. My je zde budeme pouze konstatovat.

1) Vlastní čísla symetrické matice $\mathbf{S}$ s reálnými prvky jsou reálná.

2) Vlastní vektory symetrické matice $\mathbf{S}$ odpovídající různým vlastním číslům jsou ortogonální.

3) U vlastních čísel reálné symetrické matice $\mathbf{S}$ je vždy aritmetická násobnost vlastního čísla rovna geometrické násobnosti.

Vzhledem k vlastnosti 3) tedy pro symetrickou matici vždy existuje kanonický diagonální tvar a je $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{S}\,\mathbf{V} = \mathbf{D}$.

Kapitola 8

Euklidovský n-rozměrný prostor E_n

8.1. Základní pojmy

Euklidovský **n**-rozměrný prostor je prostor geometrický. Jeho prvky jsou jednak body o **n** souřadnicích a dále též geometrické vektory.

Máme-li dva body **A** = $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ a **B** = $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$, definujeme vektor

AB = **B-A** = ($b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$, …, $b_n - a_n$) , tj. koncový bod mínus počáteční bod.

Abychom neměli v $\mathbf{E_n}$ prvky různého druhu (body, vektory), lze body ztotožnit s **radiusvektory,** což jsou vektory s počátečním bodem **0** = [0, 0, …, 0].

Velikost vektoru počítáme ze vztahu

$$|\mathbf{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}$$

Je to vlastně vzdálenost bodu **A** od bodu **B**.

Všechny vektory, které mají stejnou velikost a stejný směr, považujeme za totožné. Takové vektory mají také stejné složky a tvoří jeden prvek prostoru $\mathbf{E_n}$. Lze tak provést vzájemně jednoznačné zobrazení prostoru $\mathbf{E_n}$ na prostor $\mathbf{V_n}$. **Velikost vektoru je** vlastně **totéž jako absolutní hodnota vektoru ve $\mathbf{V_n}$** .

Euklidovský prostor $\mathbf{E_n}$ je též prostorem se skalárním součinem. V prostoru $\mathbf{V_n}$ jsme hovořili o ortogonálních vektorech. V prostoru E_n znamená ortogonalita kolmost vektorů. Tedy **dva vektory jsou kolmé, právě když je jejich skalární součin roven nule.**

Dále pro vektory **A, B** zavádíme **úhel** $\propto$ těchto vektorů**,** pro který platí
$\cos\propto = \frac{\mathbf{A.B}}{|\mathbf{A}|.|\mathbf{B}|}$.

Báze v prostoru $\mathbf{E_n}$ je v geometrickém smyslu soustava souřadnic. Např. ortonormální báze v prostoru $\mathbf{V_n}$ složená ze základních jednotkových vektorů představuje v $\mathbf{E_n}$ geometricky Kartézskou soustavu souřadnic s navzájem kolmými osami a stejnou jednotkou na všech osách. Další báze prostoru $\mathbf{V_n}$ lze interpretovat v prostoru $\mathbf{E_n}$ jako jiné soustavy souřadnic, které mohou být kosoúhlé a jednotky na osách nemusí být stejně dlouhé.

Příklad: Jsou dány body **A** = [2, -1, 3] , **B** = [1, 1, 1] , **C** = [0, 0, 5]. Najděme velikost vektorů **AB** a **AC** . Dále najděme úhel vektorů **AB** a **AC**.

Použijme vzorec pro velikost vektoru:

je |**AB**| = $\sqrt{(1-2)^2+(1+1)^2+(1-3)^2}$ = 3

Podobně |**AC**| = $\sqrt{(0-2)^2+(0+1)^2+(5-3)^2}$ = 3

Vektor **AB** = (-1, 2, -2) a vektor **AC** = (-2, 1, 2) .

Úhel $\propto$ vektorů **AB** a **AC** je: cos$\propto$ = $\frac{2+2-4}{3\,.3}$ = $\frac{0}{9}$ = 0 . $\propto = 90°$. Vektory jsou kolmé.

Nyní zavedeme pojem lineární nezávislosti bodů v $\mathbf{E_n}$.

Mějme body $\mathbf{P_0}$, $\mathbf{P_1}$, … , $\mathbf{P_r}$ (r+1 bodů). Tyto body jsou pro r > 1 lineárně nezávislé právě když vektory $\mathbf{P_0P_1}$, $\mathbf{P_0P_2}$, … $\mathbf{P_0P_r}$ jsou lineárně nezávislé. Jediný bod **P** je lineárně nezávislý a dva body $\mathbf{P_0}$, $\mathbf{P_1}$ jsou též lineárně nezávislé.

Příklad: Jsou dány body $\mathbf{P_0}$ = [1, 0, 0, 0] , $\mathbf{P_1}$ = [0, 1, 0, 0] , $\mathbf{P_2}$ = [0, 0, 1, 0] z $\mathbf{E_4}$. Jsou tyto body závislé nebo nezávislé?

Sestrojíme vektory $\mathbf{P_0P_1} = \mathbf{P_1} - \mathbf{P_0}$ = (-1, 1, 0, 0)

$\mathbf{P_0P_2} = \mathbf{P_2} - \mathbf{P_0}$ = (-1, 0, 1, 0) .

Tyto dva vektory jsou lineárně nezávislé, a proto body $\mathbf{P_0}$, $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$ jsou též lineárně nezávislé.

Pokud jsou utvořené vektory lineárně závislé, jsou body též závislé. Lze dokázat, že lineární závislost a nezávislost bodů nezáleží na jejich očíslování, tj. na jejich pořadí.

Jsou-li body $\mathbf{P_0}$, $\mathbf{P_1}$, … , $\mathbf{P_r}$ lineárně závislé, pak alespoň jeden z nich lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních (stejně jako u vektorů) a vynecháme-li ze skupiny nezávislých bodů nějaké body, jsou zbylé body opět lineárně nezávislé (opět stejně jako u vektorů).

Mějme r+1 lineárně nezávislých bodů $\mathbf{P_0}$, $\mathbf{P_1}$, …., $\mathbf{P_r}$ v $\mathbf{E_n}$, $\mathbf{r < n}$. Pak tyto body vytvářejí v E_n **lineární bodový podprostor dimenze r** tvaru

$\mathbf{X = P_0 + < P_0P_1 , P_0P_2 , \dots ,P_0P_r >}$. Vektory v lomených závorkách vytvářejí **směrový modul** tohoto podprostoru. **Směrový modul je lineárním vektorovým prostorem dimenze r**.

8.2. Přímka a rovina v E_n

Množina všech bodů $\mathbf{X \in E_n}$ určených dvěma lineárně nezávislými body

$\mathbf{A_0}$, $\mathbf{A_1} \in \mathbf{E_n}$ tak, že $\mathbf{X = A_0 + < A_1 - A_0 >}$, neboli $\mathbf{X = A_0 + (A_1 - A_0).t}$, $\mathbf{t} \in \mathbf{R}$, se nazývá **přímka v prostoru** $\mathbf{E_n}$. Vektor $\mathbf{S} = \mathbf{A_1} - \mathbf{A_0}$ je **směrový vektor přímky** a je $\mathbf{X = A_0 + S.t}$, $\mathbf{t} \in \mathbf{R}$. Číslo **t** se nazývá **parametr**, bod $\mathbf{A_0}$ je **počáteční bod**. Lineární vektorový podprostor dimenze 1 v $\mathbf{E_n}$ určený bází < $\mathbf{A_! - A_0}$> se nazývá **směrový modul přímky**.

Každé hodnotě t odpovídá jeden bod přímky. Pro t = 0 dostaneme počáteční bod $\mathbf{A_0}$, pro t ∈ < 0, 1> dostaneme body úsečky $\mathbf{A_0A_1}$, pro $t > 1$ dostáváme body polopřímky $\mathbf{A_0A_1}$ za bodem $\mathbf{A_1}$ a pro $t < 0$ dostaneme body přímky před bodem $\mathbf{A_0}$.

Uvedená rovnice přímky se nazývá **vektorová rovnice přímky**. Ve volbě počátečního bodu je libovůle – čili je vektorových rovnic jedné přímky nekonečně mnoho. Vektorovou rovnici lze přepsat na **n** parametrických skalárních rovnic, které tvoří **parametrický systém přímky**.

Příklad: Napišme parametrický systém pro přímku **p** určenou dvěma body

A = [3, 1, 7, 2] a **B** = [4, 2, 5, 1] v $\mathbf{E_4}$.

Vektorová rovnice přímky je **X** = **A** + (**B-A**).t , t ∈ **R** . Vektor **B-A** = (1, 1, -2, -1).

Rovnici rozepíšeme po složkách: $x_1 = 3 + t$, $x_2 = 1 + t$, $x_3 = 7 - 2t$, $x_4 = 2 - t$ a uvedené čtyři rovnice tvoří hledaný parametrický systém přímky **p**.

Příklad: Rozhodněme, zda bod **D** = [1, 0, 1, 1] leží na přímce **p** z minulého příkladu.

Možnosti řešení jsou dvě.

1způsob : Leží-li bod na přímce **p**, dostaneme jeho souřadnice tak, že k počátečnímu bodu **A** přičteme směrový vektor násobený vhodným parametrem **t**. Tedy zpětně – po dosazení bodu **D** do přímky musíme dostat ze všech rovnic stejnou hodnotu parametru **t**.

Proveďme dosazení: $1 = 3 + t$, $0 = 1 - t$, $1 = 7 - 2t$, $1 = 2 - t$. Z první rovnice dostáváme, že $t = -2$, ze druhé rovnice je $t = 1$, a je jasné, že bod **D** na přímce **p** neleží.

2.způsob (mnohem lepší pro bodové prostory větší dimenze) : Leží-li bod **D** na přímce **p** musí být vektor **D-A** lineární kombinací vektorů ze směrového modulu přímky **p**. Vektor modulu je jen jeden, tedy musí být vektor **D-A** jeho násobkem.

Ale vektor modulu je **S** = (1, -1, -2, -1) a vektor **D-A** = (-2, -1, -6, -1) není násobkem vektoru **S**. Bod **D** tedy neleží na přímce **p**.

Množina všech bodů určená třemi nezávislými body $\mathbf{A_0}$, $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2} \in \mathbf{E_n}$ tak, že

$\mathbf{X = A_0 + < A_1 - A_0 , A_2 - A_0} >$ neboli $\mathbf{X} = \mathbf{A_0} + (\mathbf{A_1 - A_0}).t_1 + (\mathbf{A_2 - A_0}).t_2$,

kde t_1 , $t_2 \in \mathbf{R}$ a jsou nezávislé se nazývá rovina v $\mathbf{E_n}$. Rovina je lineární bodový prostor dimenze 2 v $\mathbf{E_n}$, má dva směrové vektory, dva na sobě nezávislé parametry a její směrový modul je složen ze dvou lineárně nezávislých vektorů a tvoří lineární vektorový podprostor dimenze 2 v $\mathbf{E_n}$.

Příklad: Napišme parametrický system roviny $\boldsymbol{\rho} \in \mathbf{E_5}$ **,** dané bodem

A = [1, 2, 3, -2, 5] a rovnoběžné s vektory $\mathbf{A}_1$ = (1, 2, 0, 3, 6) a $\mathbf{A_2}$ = (2, 0, 7, -1, 3).

Vektorová rovnice roviny $\boldsymbol{\rho}$ je $\mathbf{X} = \mathbf{A} + \mathbf{A_1}.t_1 + \mathbf{A_2}.t_2$. Tuto rovnici rozepíšeme po složkách a dostaneme parametrický systém roviny $\boldsymbol{\rho}$:

$x_1 = 1 + t_1 + 2t_2$, $x_2 = 2 + 2t_1$, $x_3 = 3 + 7t_2$, $x_4 = -2 + 3t_1 - t_2$, $x_5 = 5\ 1\ 6t_1 + 3t_2$.

Příklad: Je dána rovina $\boldsymbol{\rho}$: **X** = [-1, 1, 2] + (2, 3, 1).t_1 + (-1, 0, 3).t_2 .

Zjistěme, zda body **H** = [5, 1, -2] , **K** = [6, 7, -5] leží v rovině $\boldsymbol{\rho}$.

Bylo by možné body postupně dosadit do levých stran rovnic a řešit tyto soustavy rovnic o dvou neznámých t_1 a t_2 . Pokud bychom dostali dvojici parametrů, která by soustavu řešila, ležel by bod v rovině.

Ale provedeme řešení elegantněji. Pokud vektor **H-A**, (resp. **K-A**) leží v rovině $\boldsymbol{\rho}$, leží tam i bod **H** (resp.**K**). Dimenze směrového modulu roviny se rovná dvěma. Pokud vektor **H-A** (resp.**K-A**) leží v rovině $\boldsymbol{\rho}$, je na směrových vektorech závislý, tudíž hodnost matice sestavená ze směrových vektorů a vektoru **H–A** (resp.**K-A**) bude mít opět hodnost dvě. Pokud vektor **H-A** (resp.**K-A**) v rovině $\boldsymbol{\rho}$ neleží, bude mít matice hodnost tři a bod **H** (resp.**K**) v rovině $\boldsymbol{\rho}$ neleží.
Tato úvaha vede pouze na výpočet hodnosti matice, místo řešení soustav rovnic.

Proveďme pro bod **H** : Matice je tvaru

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & -9 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$. Matice má hodnost tři, vektor **H-A** je na směrových vektorech nezávislý, tedy bod **H** neleží v rovině $\boldsymbol{\rho}$.

Provedeme pro bod **K** : Matice je tvaru

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 7 & 6 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & -9 & -21 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$. Hodnost matice je dvě.

Vektor **K-A** je na směrových vektorech závislý, tedy bod **K** $\in \boldsymbol{\rho}$.

Příklad: Určeme vzájemnou polohu přímek v prostoru E_4 .

X = [1, 1, 1, 1] + (1, 2, 3, 4).t a **Y** = [2, 1, 0, 1] + (3, 0, 1, 2).t , t $\in$ **R** .

Přímky v E_4 mohou být buď totožné, rovnoběžné, různoběžné nebo mimoběžné. Okamžitě vidíme, že nejsou totožné ani rovnoběžné, to by totiž směrový vektor druhé přímky musel být násobkem směrového vektoru prvé přímky. Jsou tedy buď různoběžné nebo mimoběžné. Různoběžné jsou v případě, že mají průsečík, tedy že leží v jedné rovině. Vytvoříme matici z vektorů $\mathbf{S_1}$, $\mathbf{S_2}$ a vektoru vytvořeného z počátečních bodů obou přímek. Zjistíme její hodnost. Bude-li hodnost dvě, jsou přímky různoběžné a mají průsečík, který bychom spočítali ze soustavy rovnic získané z parametrických systémů obou přímek. Bude-li hodnost tři, jsou přímky mimoběžné.

Proveďme: Matice je tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -8 & -10 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$. Hodnost

matice je tři. Přímky jsou tedy mimoběžné a nemají žádný průsečík.

Vektorovou rovnici přímky a roviny lze zapsat v poněkud jiném tvaru. Rovnici přímky $\mathbf{X} = \mathbf{A_0} + (\mathbf{A_1} - \mathbf{A_0}).t$ lze též přepsat jako $\mathbf{X} = \mathbf{A_0}.(1-t) + \mathbf{A_1}.t$, neboli $\mathbf{X} = t_1.\mathbf{A_0} + t_2.\mathbf{A_1}$, kde $t_1 + t_2 = 1$. Má-li bod ležet na úsečce $\mathbf{A_0A_1}$, musí navíc ještě platit $t_1 \geq 0$ a $t_2 \geq 0$, neboť $t \in \langle 0, 1 \rangle$, a tak dostáváme vlastně konvexní lineární kombinaci bodů $\mathbf{A_0}$, $\mathbf{A_1}$. Čili konvexní lineární kombinace dvou bodů $\mathbf{A_0}$, $\mathbf{A_1}$ vytvářejí úsečku ohraničenou těmito dvěma body.

Podobně vektorovou rovnici roviny lze napsat po roznásobení ve tvaru

$\mathbf{X} = \mathbf{A_0} + \mathbf{A_1}t_1 - \mathbf{A_0}t_1 + \mathbf{A_2}t_2 - \mathbf{A_0}t_2$, tj. $\mathbf{X} = z_1\mathbf{A_0} + z_2\mathbf{A_1} + z_3\mathbf{A_2}$, kde $z_1 = 1 - t_1 - t_2$,

$z_2 = t_1$, $z_3 = t_2$. Tedy $z_1 + z_2 + z_3 = 1$. Přidáme-li k tomu ještě podmínku nezápornosti pro z_1 , z_2 , z_3 dostáváme konvexní lineární kombinace bodů $\mathbf{A_0}$, $\mathbf{A_1}$ a $\mathbf{A_2}$ a ty vytvářejí vnitřek trojúhelníka s vrcholy v bodech $\mathbf{A_0}$, $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ včetně hraničních úseček.

8.3. Příčka mimoběžek v E_3

Příčkou mimoběžek $\mathbf{P} = \mathbf{A} + \langle \mathbf{S_1} \rangle$ a $\mathbf{Q} = \mathbf{B} + \langle \mathbf{S_2} \rangle$ rozumíme každou přímku $\mathbf{R} = \mathbf{C} + \langle \mathbf{W} \rangle$, která obě mimoběžky protíná. Budeme hledat příčku buď ve směru vektoru **W** nebo procházející bodem **C** .

Příčka ve směru vektoru **W** existuje jednoznačně, pokud **W** je nezávislý na vektorech $\mathbf{S_1}$ a $\mathbf{S_2}$, (neleží tedy v jejich lineárním obalu).

Pokud ověříme, že přímky jsou skutečně mimoběžné a vektor **W** je na jejich směrových vektorech nezávislý, najdeme příčku tak, že sestrojíme rovinu

ρ = **A** + **<S_1 , W>** a najdeme její průsečík **C** s přímkou **Q** . Hledaná příčka je pak **R** = **C** + **<W>** .

Pokud vektor **W** leží v ortogonálním doplňku vektorů **S_1 , S_2** , a tedy je k oběma směrovým vektorům kolmý, je nalezená příčka nejkratší příčkou mimoběžek, a lze pomocí ní najít vzdálenost těchto mimoběžek.

Vzdálenost se nalezne tak, že najdeme průsečík **D** mimoběžky **R** = **C** + **<W>** s mimoběžkou **P**, a vzdálenost bodů **C** a **D** je pak hledanou vzdáleností mimoběžek.

Nyní hledejme příčku mimoběžek procházející bodem **C**, který neleží na žádné z nich. Příčka existuje jednoznačně, pokud vektory **C-A** a **C-B** neleží v lineárním obalu vektorů **S_1** a **S_2** . Pokud ověříme tuto podmínku, najdeme příčku tak, že sestrojíme rovinu ρ = **A** + **<S_1 , C-A>** , najdeme její průsečík **D** s mimoběžkou **Q**, a hledaná příčka je pak **R** = **C** + **< C-D >** .

Příklad: Najděme nejkratší příčku mimoběžek **P** =[6, 3, -3] + <(-3, 2, 4)> a

Q = [-1, -7, 4] + <(-3, 3, 8)> a určeme vzdálenost těchto mimoběžek.

Nejprve ověříme, že přímky jsou skutečně mimoběžky (proveďte sami). Dále najdeme ortogonální doplněk vektorů (-3, 2, 4) a (-3, 3, 8) , což je vektor

(4, 12, -3) . Sestrojíme rovinu ρ = [6, 3, -3] + <(-3, 2, 4), (4, 12, -3)> a řešíme její průsečík s přímkou **Q** :

$6 – 3t_1 + 4t_2 = -1 - 3t_3$

$3 + 2t_1 + 12t_2 = -7 + 3t_3$

$-3 + 4t_1 – 3t_2 = 4 + 8t_3$. Tento průsečík je [-1, -7, 4] .

Hledaná příčka je tedy **R** = [-1, -7, 4] + < (4, 12, -3)> .

Nyní najdeme její průsečík s přímkou **P** :

je $-1 + 4t_1 = 6 - 3t_2$

$-7 + 12t_1 = 3 + 2t_2$

$4 - 3t_1 = -3 + 4t_2$, a odtud je průsečík **D** = [3, 5, 1] .

Vzdálenost mimoběžek **P** a **Q** je pak vzdálenost bodů **CD** = $\sqrt{16 + 144 + 9} = 13$

8.4. Lineární bodový podprostor dimenze h v E_n

Lineární bodový prostor dimenze $\mathbf{h} \leq \mathbf{n}$ je v $\mathbf{E_n}$ určen **h+1** lineárně nezávislými body $\mathbf{A_0}$, $\mathbf{A_1}$, …, $\mathbf{A_h}$ a má tvar **X** = $A_0 + \langle \mathbf{A_1} - \mathbf{A_0}, \mathbf{A_2} - \mathbf{A_0}, \dots, \mathbf{A_h} - \mathbf{A_0} \rangle$. Má tedy **h** směrových vektorů, směrový modul je lineární podprostor dimenze **h** v $\mathbf{E_n}$ a parametrický systém má **h** parametrů.

Příklad : Napišme vektorovou rovnici a parametrický systém lineárního bodového prostoru určeného body $\mathbf{A_0}$ = [1, 0, 2, -1, 3] , $\mathbf{A_1}$ = [0, 3, 1, 0, -2] ,

$\mathbf{A_2}$= [-1, 1, 0, 3, 2] , $\mathbf{A}_3$ = [1, 2, 3, -1, 0] v $\mathbf{E_5}$.

Sestrojme vektory $\mathbf{A_1}$-$\mathbf{A_0}$ = (-1, 3, -1, 1, -5) , $\mathbf{A_2}$-A_0 = (-2, 1, -2, 4, -1) ,

$\mathbf{A_3}$–$\mathbf{A_0}$ = (0, 2, 1, 0, -3). Zjistíme, jestli jsou vektory nezávislé:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 1 & -5 \\ -2 & 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & -5 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & -5 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$ a vidíme, že vektory jsou nezávislé. Směrový

modul má dimenzi 3. Lineární bodový prostor má tedy dimenzi 3 a je

X = [1, 0, 2, -1, 3] + < (-1, 3, -1, 1, -5) , (-2, 1, -2, 4. -1) , (0, 2, 1, 0, -3)> .

Parametrický systém je pak

$x_1 = 1 - t_1 - 2t_2$, $x_2 = 3t_1 + t_2 + 2t_3$, $x_3 = 2 - t_1 - 2t_2 + t_3$, $x_4 = -1 + t_1 + 4t_2$,

$x_5 = 3 - 5t_1 - t_2 - 3t_3$

Příklad: Určeme vzájemnou polohu podprostorů

X_1 = [5, 6, 2, 6] + <(1, 2, 2, 1), (2, 3, -1, 3)> a

X_2 = [4, 1, 4, 1] + < (3, 1, 2, -2), (-1, -1, 1, 1) > .

Je vidět, že se jedná o dvě roviny. Najdeme si dimenzi spojení obou směrových modulů z matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 21 & -10 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ a vidíme, že hodnost matice je rovna čtyřem.

Roviny tedy nejsou rovnoběžné. Mimoběžné nemohou být též, jelikož vektor vytvořený z počátečních bodů již nemůže dále hodnost zvýšit. Roviny jsou tedy různoběžné. Dimenze průniku směrových modulů je 4 – 4 = 0. To znamená, že roviny se protínají v jediném bodě, který bychom spočítali jako jediné řešení soustavy čtyř rovnic o čtyřech neznámých s regulární maticí hodnosti čtyři.

8.5. Nadrovina, vzdálenost bodu od nadroviny

Lineární bodový podprostor dimenze **n-1** určený n nezávislými body **A_0** , **A_1** , …,**A_{n-1}** se nazývá **nadrovina**. Její vektorová rovnice je

X = **A**$_0$ + < **A_1 – A_0** , **A_2 – A_0** , …, **A_{n-1}– A_0** > neboli

X = **A_0** + (**A_1 – A_0**).t_1 + … + (**A_{n-1} – A_0**).t_{n-1} , kde t_1 , …, t_{n-1} jsou nezávislé a leží v **R**.

Nadrovina má tedy ve vektorové rovnici **n-1** lineárně nezávislých směrových vektorů a **n-1** parametrů. Směrový modul nadroviny má dimenzi **n-1**.

Pro nadrovinu existuje též **obecná rovnice** tvaru $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b = 0$, kde alespoň jedno a_i je různé od nuly. Koeficienty a_1 , a_2 , …, a_n jsou složkami **normálového vektoru N** = (a_1 , a_2, …, a_n). Normálový vektor je kolmý ke všem směrovým vektorům nadroviny, tedy k celému směrovému modulu nadroviny.

Leží proto v ortogonálním doplňku tohoto směrového modulu a ortogonální doplněk má dimenzi 1. Obecná rovnice nadroviny je určena jednoznačně až na násobek skalárem.

Přímka je nadrovinou v prostoru $\mathbf{E_2}$, čili má v tomto prostoru obecnou rovnici. Rovina je nadrovinou v prostoru $\mathbf{E_3}$.

Dvě nadroviny jsou lineárně závislé (rovnoběžné), jsou-li jejich normálové vektory lineárně závislé. Dvě nadroviny jsou lineárně nezávislé (různoběžné), jsou-li jejich normálové vektory lineárně nezávislé.

Úhel dvou nadrovin je úhel jejich normálových vektorů. **Vzdálenost bodu P**$[\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n}]$ **od nadroviny** je dána vzorcem

$$v = \frac{|a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + b|}{|\mathbf{N}|} \quad .$$

Příklad: Určeme vzdálenost bodu **P** = [1, 1, -2, 3] od nadroviny v $\mathbf{E_4}$, která má rovnici $2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 - 5 = 0$.

Stačí dosadit do vzorce: $v = \frac{|2.1+1.1-1.(-2)-4.3-5|}{\sqrt{4+1+1+16}} = \frac{12}{\sqrt{22}} = \frac{6\sqrt{22}}{11}$.

Příklad: Napišme rovnici nadroviny v $\mathbf{E_4}$ procházející bodem **A** = [3, 0, 2, 0] a kolmé k přímce **p**: X = [2, 0, 2, -1] + < (1, -4, 7, 2) > .

Je zřejmé, že směrový vektor přímky musí být normálovým vektorem nadroviny. Nadrovina má tedy obecnou rovnici $x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 + b = 0$.

Číslo b určíme tak, aby bod **A** ležel v nadrovině, to znamená, aby vyhovoval rovnici nadroviny. Dosaďme tedy bod **A** do rovnice a dostáváme

$2 - 0 + 14 - 2 + b = 0$, a odtud je $b = -14$. Rovnice nadroviny je tedy

$x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 - 14 = 0$.

Příklad: Najděme obecnou rovnici nadroviny v $\mathbf{E_4}$, která je dána vektorově
$\mathbf{X}$ = [2, -1, 3, 5] + < (3, 0, 7, -5), (2, 1, 0, 4), (1, 1, 1, 0) > .

Normálový vektor musí ležet v ortogonálním doplňku směrového modulu.
Najděme tedy ortogonální doplněk pomocí matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 7 & -5 \end{pmatrix}$, kterou nejprve upravíme na Gaussův tvar.

Je $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 7 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 10 & -17 \end{pmatrix}$. Pro vektor ortogonálního doplňku tvaru $\mathbf{W}^{\perp}$= (x, y, z, 1) musí platit 10z – 17 = 0 , odtud z = $\frac{17}{10}$. Vezměme tedy raději jeho desetinásobek, a to vektor

(x, y, 17, 10). Dále musí platit y + 34 – 40 = 0 , to znamená, že y = 6. Nyní máme vektor (x, 6, 17, 10) a musí platit x + 6 + 17 = 0. Je tedy x = -23.

Bázický vektor ortogonálního doplňku je $\mathbf{W}^{\perp}$= (-23, 6, 17, 10) a rovnice nadroviny je tvaru $23x_1 - 6x_2 - 17x_3 + 10x_4 + b = 0$. Číslo b určíme dosazením počátečního bodu [2, -1, 3, 5] do rovnice nadroviny, jelikož v ní leží a musí tedy rovnici vyhovovat. Je 23.2 – 6.(-1) – 17.3 + 10.5 + b = 0 , a odtud je b = -51.

Obecná rovnice nadroviny je tedy $23x_1 - 6x_2 - 17x_3 + 10x_4 - 51 = 0$.

8.6. Bodový podprostor určený soustavou lineárních rovnic

Lineární bodový podprostor dimenze $\mathbf{h} < \mathbf{n-1}$ nemůže být vyjádřen v $\mathbf{E_n}$ jedinou obecnou rovnicí, ale lze ho vyjádřit soustavou obecných rovnic, neboli soustavou nadrovin.

Příklad: Mějme soustavu 3 rovnic o třech neznámých

$x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$

$x_1 - x_2 + x_3 = 2$

$2x_1 + x_2 \quad = 8$. Řešením této soustavy, jejíž matice soustavy má hodnost 2, dostaneme vektor **X** $= \left(\frac{10-x_3}{3}, \frac{2x_3+4}{3}, x_3\right)$, $x_3 \in R$.   (Vyřešte sami.)

Označme $x_3 = t$ a je pak $x_1 = \frac{10}{3} - \frac{1}{3}t$, $x_2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}t$, $x_3 = t$, $t \in \mathbf{R}$, což je

rovnice přímky. Naše přímka je tedy v $\mathbf{E_3}$ určena soustavou obecných rovnic tří nadrovin, z nichž dvě jsou lineárně nezávislé.

Obecně lze říci: Považujeme-li neznámé v soustavě lineárních rovnic za souřadnice bodu, potom řešitelná soustava lineárních rovnic definuje v $\mathbf{E_n}$ lineární bodový podprostor, jehož dimenze je rovna počtu parametrů výsledného vektoru řešení.

Řešení příslušné homogenní soustavy vytváří směrový modul tohoto lineárního bodového prostoru a jedno řešení nehomogenní soustavy poskytuje počáteční bod $\mathbf{A_0}$, to znamená, že představuje posunutí směrového modulu ve směru radiusvektoru **A-0** .

Příklad: Najděme vektorovou rovnici lineárního bodového podprostoru v $\mathbf{E_4}$, který je dán soustavou obecných rovnic

$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2$

$\quad x_2 + 4x_3 + x_4 = 3$

Normálové vektory obou nadrovin, které soustava představuje, jsou lineárně nezávislé, neboli řešení má dva parametry. Soustava tedy určuje rovinu v $\mathbf{E_4}$. Vyřešením soustavy bychom získali parametrický systém této roviny. Jiná možnost je najít ortogonální doplněk k podprostoru určenému dvěma normálovými vektory, a tak získat směrový modul roviny, a poté uhodnout jedno řešení soustavy a vzít ho jako počáteční bod pro vektorovou rovnici roviny. Provedeme to tímto druhým způsobem:

Matice sestavená z obou normálových vektorů je, jak vidíme, přímo v Gaussově tvaru $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Bázické vektory ortogonálního doplňku jsou dva, předpokládáme je ve tvaru

(x, y, 1, 0) a (x, y, 0, 1). Pro první vektor je y + 4 = 0, neboli y = -4 , a dále je

x + 4 +1 = 0, tedy x = -5. První vektor ortogonálního doplňku je vektor

$\mathbf{W}_1^{\perp} = (-5, -4, 1, 0)$. Druhý vektor vytvoříme podobně. Je y + 1 =0, tedy y = -1.

Dále je

x + 1 – 1 = 0, tedy x = 0. Takže druhý vektor doplňku je $\mathbf{W}_2^{\perp}$ = (0, -1, 0, 1) .

Nyní uhodneme jedno řešení soustavy rovnic, je to například bod [0, 0, 1, -1].

A již můžeme napsat vektorovou rovnici našeho podprostoru. Je to

X = [0, 0, 1, -1] + < (-5, -4, 1, 0), (0, -1, 0, 1)> .

Obecně platí, že parametrické vyjádření lineárního bodového podprostoru dimenze **h** v $\mathbf{E_n}$ lze převést na **n-h** nezávislých lineárních rovnic o **n** neznámých, které se nazývají obecné rovnice lineárního bodového podprostoru dimenze **h** v $\mathbf{E_n}$. Tyto obecné rovnice představují systém nadrovin v $\mathbf{E_n}$.

Proto, jak víme, je přímka jako podprostor dimenze 1 určena v $\mathbf{E_3}$ dvěma nezávislými rovnicemi rovin. Tyto roviny jsou prostory dimenze 2 , tedy jsou to nadroviny v $\mathbf{E_3}$.

Příklad: Najděme obecné rovnice lineárního bodového podprostoru v $\mathbf{E_4}$ daného vektorově

X = [1, 1, 1, 1] + < (5, 4, -22. -11) , (5, -29, 11, 22>

Normálové vektory obecných rovnic leží v ortogonálním doplňku podprostoru určeného směrovými vektory. Najdeme tedy ortogonální doplněk pomocí

matice $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -22 & -11 \\ 5 & -29 & 11 & 22 \end{pmatrix}$, kterou upravíme na Gaussův tvar.

Je $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -22 & -11 \\ 0 & -33 & 33 & 33 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 4 & -22 & -11 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ortogonální doplněk má dva bázické vektory, které budeme předpokládat ve tvaru (x, y, 1, 0) a (x, y, 0, 1) , čímž je zajištěna jejich nezávislost. Pro první vektor platí -y + 1 = 0 , tedy y = 1 a dále 5x + 4 – 22 = 0, tedy je x = $\frac{18}{5}$
Po vynásobení vektoru pěti dostáváme první bázický vektor ortogonálního doplňku ve tvaru $\mathbf{W}_1^{\perp}$ = (18, 5, 5, 0).

Stejným způsobem vytvoříme druhý vektor doplňku. Je -y + 1 = 0 , tedy je y = 1.

Dále je $5x + 4 - 11 = 0$, tedy $x = \frac{7}{5}$ a po vynásobení pěti dostáváme druhý vektor ortogonálního doplňku ve tvaru $\mathbf{W}_2^{\perp} = (7, 5, 0, 5)$. Obecné rovnice lineárního bodového podprostoru jsou tedy

$18x_1 + 5x_2 + 5x_3 + b_1 = 0$ a $7x_1 + 5x_2 + 5x_4 + b_2 = 0$.

Čísla b_1 a b_2 určíme pomocí dosazení počátečního bodu, který musí vyhovovat oběma rovnicím.

Je $18 + 5 + 5 + b_1 = 0$, tedy $b_1 = -28$. Dále je $7 + 5 + 5 + b_2 = 0$, tedy $b_2 = -17$.

Výsledná soustava obecných rovnic je tedy

$$18x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 28 = 0$$

$$7x_1 + 5x_2 + 5x_4 - 17 = 0 \ .$$

9.kapitola

Konvexní množina, simplex

9.1. Konvexní množina, konvexní polyédr

Množina $\mathbf{M} \subset \mathbf{E_n}$ se nazývá **konvexní**, jestliže s každými dvěma body **A**, **B** , kde **A** $\neq$ **B** , obsahuje též všechny body úsečky **AB** . Množinu prázdnou a množinu jednobodovou počítáme též mezi konvexní množiny.

Z minulé kapitoly již víme, že úsečku lze zapsat jako konvexní lineární kombinaci jejích krajních bodů. Tedy úsečku **AB** lze zapsat jako $X = t_1\mathbf{A} + t_2\mathbf{B}$ **,** kde $t_1, t_2 \geq 0$ a $t_1 + t_2 = 1$.

Příklad: Ukažme, že množina **M** popsaná soustavou nerovností

$x_2 - 2x_1 \leq 0$, $2x_2 - x_1 \geq 0$, $x_1.x_2 \leq 2$ není konvexní.

V množině **M** zřejmě leží body **A** = [1, 2] a **B** = [2, 1] (nakreslete si obrázek).

Střed úsečky **AB** má souřadnice **S** = $[\frac{3}{2,} , \frac{3}{2}]$. Tento bod vyhovuje první i druhé nerovnosti, ale nevyhovuje třetí nerovnosti, neboť číslo $\frac{9}{4}$ není menší nebo rovno dvěma. Střed úsečky **AB** tedy neleží v množině **M** a množina **M** tedy není konvexní.

Platí, že **průnik libovolného systému konvexních množin je konvexní množina.**

Je-li $\mathbf{M} \subset \mathbf{E_n}$ konvexní množina a $\mathbf{P_0}$, $\mathbf{P_1}$, … , $\mathbf{P_r}$ jsou libovolné body množiny **M**, pak každá konvexní lineární kombinace těchto bodů opět leží v množině **M** .

Mějme nyní libovolnou podmnožinu $\mathbf{M} \subset \mathbf{E_n}$. Průnik všech konvexních podmnožin prostoru $\mathbf{E_n}$, které obsahují množinu **M**, se nazývá **konvexní obal množiny M**. Tento konvexní obal je množina všech konvexních lineárních kombinací konečných počtů bodů z množiny **M** a značíme ho $K(\mathrm{M})$.

Mějme množinu **M**. **Hraniční bod** této množiny je takový bod, v jehož libovolném okolí leží jak body z množiny **M**, tak body z doplňku množiny **M** v $\mathbf{E_n}$ Obsahuje-li množina všechny své hraniční body, nazývá se **uzavřená množina**. Dále říkáme, že **množina M je v $\mathbf{E_n}$ omezená,** jestliže množina **M** je celá obsažena v nějakém okolí bodu **0** =[0, 0, …, 0].

Konvexní množiny mohou být uzavřené nebo otevřené, omezené nebo neomezené. Příkladem uzavřené konvexní množiny je např. kruh včetně své hraniční kružnice, k otevřené množině pak hraniční kružnice nepatří. Obě tyto množiny jsou ovšem omezené. Příkladem neomezené konvexní množiny je např. úhel tvořený dvěma polopřímkami – může být buď otevřená (bez ramen úhlu) nebo uzavřená.

Bod **A** konvexní množiny **M** se nazývá **vrchol (krajní bod, extremální bod),** jestliže neexistuje úsečka **CD** , **C**, **D** $\in$ **M** ,jejímž by byl vnitřním bodem, tedy bod **A** nelze vyjádřit ve tvaru $\mathbf{A} = t_1\mathbf{C} + t_2\mathbf{D}$, $t_1 + t_2 = 1$, t_1 , $t_2 \geq 0$.

Tedy např. uzavřená množina tvaru kruhu má nekonečně mnoho krajních bodů, uzavřená množina tvaru trojúhelníka má 3 krajní body.

Pro konvexní uzavřenou a ohraničenou množinu M platí, že konvexní obal množiny jejích krajních bodů je roven M.

Uvažujme konvexní množiny **$\mathbf{M_1}$ a $\mathbf{M_2}$**, které jsou tvořeny nadrovinou v $\mathbf{E_n}$. Nadrovina rozdělí $\mathbf{E_n}$ na dvě části, které jsou obě konvexní neomezené bez vrcholů. Nazývají se **poloprostory** a mohou být otevřené nebo uzavřené. Jsou popsány tak, že v rovnici nadroviny změníme rovnost na nerovnost. Hranic (nerovností) ve formě nadrovin v $\mathbf{E_n}$ lze vzít několik, každá vytvoří dva poloprostory, z nichž jeden vybereme podle typu nerovnosti, a vzhledem k tomu, že průnik systému konvexních množin je opět konvexní množina, dostaneme buď konvexní množinu s konečným počtem krajních bodů nebo konvexní prázdnou množinu.

Neprázdná, uzavřená ,ohraničená, konvexní množina s konečným počtem krajních bodů se nazývá konvexní polyédr. Konvexní polyédr má vždy alespoň jeden krajní bod a všechny jeho body lze vyjádřit jako konvexní lineární kombinaci krajních bodů.

Platí, že **konvexní obal jakékoli množiny m bodů v E_n je konvexní polyédr, který má nejvýše m krajních bodů.**

Příklad: Popišme v $\mathbf{E_2}$ konvexní obal bodů

$\mathbf{A_1}$ = [1, 1] , $\mathbf{A_2}$ = [3, 0] , $\mathbf{A_3}$ =[4, 2] , $\mathbf{A_4}$ = [2, 4] , $\mathbf{A_5}$ = [2, 2].

Najdeme si nadroviny (přímky) určené vhodnými dvojicemi bodů (nakreslete si obrázek).

Je $p_{12} : x_1 + 2\,x_2 - 3 = 0$, $p_{23} : 2x_1 - x_2 - 6 = 0$, $p_{34} : x_1 + x_2 - 6 = 0$,

$p_{41} : 3x_1 - x_2 - 2 = 0$.

Snadno nyní zjistíme, že konvexní polyédr, který je konvexním obalem daných bodů, je dán soustavou nerovnic

$x_1 + 2x_2 - 3 \geq 0$

$2x_1 - x_2 - 6 \leq 0$

$x_1 + x_2 - 6 \leq 0$

$3x_1 - x_2 - 2 \geq 0$.

Body $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ **,** $\mathbf{A_3}$ a $\mathbf{A_4}$ jsou jeho krajní body (vrcholy), bod $\mathbf{A_5}$ leží v polyédru, ale není jeho krajním bodem.

Bod, který je průnikem n lineárně nezávislých hranic konvexní množiny **M** se nazývá **pseudovrchol**. Každý krajní bod konvexní množiny **M** je pseudovrchol, ale ne každý pseudovrchol je krajním bodem (vrcholem) konvexní množiny **M**.

Příklad: Ověřme, že množina bodů v $\mathbf{E_2}$ popsaná danou soustavou nerovností je konvexní polyédr, a najděme všechny jeho vrcholy a pseudovrcholy.

$2x_1 - x_2 - 2 \geq 0$, $x_1 + x_2 - 7 \geq 0$, $x_1 + 4x_2 - 10 \geq 0$,

$x_1 - 2x_2 - 10 \leq 0$, $2x_1 + 5x_2 - 38 \leq 0$.

Nahradíme nerovnosti rovnicemi, tak dostaneme 5 přímek $\mathbf{p_1}$ až $\mathbf{p_5}$ a hledáme jejich vzájemné průsečíky. Označme $\mathbf{P_{ij}}$ průsečík přímek p_i a $\mathbf{p_j}$. Dostáváme celkem 10 průsečíků (spočtěte sami), tj. 10 pseudovrcholů, a to:

$\mathbf{P_{12}}$ = [3, 4] $\mathbf{P_{23}}$ = [6, 1] $\mathbf{P_{34}}$ = [10, 0] $\mathbf{P_{45}}$ = [14, 2]

$\mathbf{P_{13}}$ = [2, 2] $\mathbf{P_{24}}$ = [8, -1] $\mathbf{P_{35}}$ = [34, -6]

$\mathbf{P_{14}}$ = [-2, -6] $\mathbf{P_{25}}$ = [-1, 8]

$\mathbf{P_{15}}$ = [4, 6]

Když si nakreslíme obrázek, vidíme, že vrcholy konvexního polyédru jsou body

$\mathbf{P_{12}}$, $\mathbf{P}_{23}$, $\mathbf{P_{34}}$, $\mathbf{P_{45}}$ a $\mathbf{P_{15}}$.

(Kdybychom si nenakreslili obrázek, museli bychom postupně dosazovat získané pseudovrcholy do nerovnic, a ten, který by všem vyhovoval, by byl vrcholem. Ověřte vrcholy i tímto způsobem).

9.2. Simplex, barycentrické souřadnice

Mějme množinu bodů $\mathbf{P_0}$, $\mathbf{P_1}$, …, $\mathbf{P_r} \in \mathbf{E_n}$ a nechť tyto body jsou lineárně nezávislé. Potom uzavřenou množinu všech jejich konvexních lineárních kombinací

$\mathbf{X} = \sum_{i=0}^{r} \lambda_\mathbf{i} \mathbf{P}_i$, kde $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$ pro všechna i = 0, 1, …, r

nazýváme **r- dimenzionální simplex S^r** v $\mathbf{E_n}$.

Body $\mathbf{P_0}$, $\mathbf{P_1}$, … , $\mathbf{P_r}$ se nazývají **vrcholy simplexu** a reálné koeficienty $\boldsymbol{\lambda}_i$ jsou **barycentrické souřadnice bodu X**. Každých **s+1** bodů, s+1 $<$ r , určuje **s** - rozměrný simplex, který se nazývá **s – rozměrná stěna simplexu $\mathbf{S}^{\mathrm{r}}$**.

Simplex je zřejmě speciální konvexní polyédr tvořený konvexním obalem lineárně nezávislých bodů.
Takové body jsou v $\mathbf{E_1}$ dva – simplex je tedy úsečka, v $\mathbf{E_2}$ jsou nezávislé body tři, tedy se jedná o trojúhelník , v $\mathbf{E_3}$ jsou nezávislé body čtyři – simplex je tedy čtyřstěn.

Konvexní množina zvaná simplex má velký význam v teorii lineárního programování užívaného v ekonomických aplikacích.

Příklad: Rozhodněme, zda body $\mathbf{P_0} = [2, 2, 0, 0]$, $\mathbf{P_1} = [0, 0, 2, 0]$, $\mathbf{P_2} = [0, 0, 0, 2]$

$\mathbf{P_3} = [1, 0, 1, 0]$ a $\mathbf{P_4} = [0, -1, -1, 0]$ jsou vrcholy simplexu.

Tyto body jsou vrcholy čtyřrozměrného simplexu, pokud jsou lineárně nezávislé. Zjistíme pomocí matice sestavené ze čtyř vektorů tvaru $\mathbf{P_i - P_0}$,

$i = 1, \ldots, 4$. Matice je tvaru $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ Hodnost je čtyři, body jsou

lineárně nezávislé, tedy jsou to vrcholy simplexu.

Příklad : a) Zjistěme, kolik stěn má simplex z minulého příkladu.

b) Napišme vektorovou rovnici jeho stěny určené body $\mathbf{P_0}$, $\mathbf{P_3}$, $\mathbf{P_4}$.

c) Zjistěme, zda body $\mathbf{A} = [0, -1, 1, 0\,]$ a $\mathbf{B} = [\,\frac{9}{8}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, 0]$ leží uvnitř simplexu. Pokud ano, najděme jejich barycentrické souřadnice.

Řešme a). Simplex má 5 vrcholů – vrchol považujeme za 0-dimenzionální stěnu. Dále má tolik jednodimenzionálních stěn, kolikrát můžeme vybrat dva body z pěti, což je kombinační číslo pět nad dvěma. To je $\frac{5!}{(5-2)!\,2!} = 10$, je tedy 10 jednodimenzionálních stěn.

Pět nad dvěma je rovno pěti nad třemi, tedy je též 10 dvoudimenzionálních stěn. Třídimenzionálních stěn je pět nad čtyřmi, a to je 5. Celkem má tedy náš simplex 30 stěn.

b) Vektorová rovnice stěny $\mathbf{P_0P_3P_4}$ (což je trojúhelník) je určena počátečním bodem $\mathbf{P_0}$ a vektory $(\mathbf{P_3 - P_0})$ a $(\mathbf{P_4 - P_0})$. Je tedy tvaru

$\mathbf{X} = [2, 2, 0, 0] + <(-1, -2, 1, 0) , (-2, -3, -1, 0)>$, kde parametry $t_1 \in < 0,1 >$, $t_2 \in <0,1>$)

Zabývejme se nejprve bodem **A**. Lineární kombinaci, jejímž výsledkem má být bod **A,** si rozepišme po složkách a přidejme podmínku, že součet koeficientů má být roven jedné. Dostáváme soustavu

$0 = 2\lambda_0 + \lambda_3$, $-1 = 2\lambda_0 - \lambda_4$, $1 = 2\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4$, $0 = 2\lambda_2$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$.

Okamžitě vidíme, že $\lambda_2 = 0$. Pro ostatní neznámé si napíšeme rozšířenou matici soustavy. Je $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -3 & -3 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -2 \end{array}\right)$ a po výměně třetího a čtvrtého řádku je matice soustavy v Gaussově tvaru. Proveďme zpětný chod: Je $\lambda_4 = \frac{1}{3}$ ze třetího řádku.

Dále ze čtvrtého řádku dostaneme $\lambda_3 = 2 - 4\lambda_4$, to je $\frac{2}{3}$. Ze druhého řádku dostaneme $2\lambda_1 = 1 - \lambda_3 + \lambda_4$, to znamená, že $\lambda_1 = \frac{2}{3}$. Z prvního řádku nám pak ale vyjde $\lambda_0 = 1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$ a to je číslo záporné. Bod **A** tedy není bodem simplexu a jeho barycentrické souřadnice vzhledem k simplexu neexistují.

Totéž provedeme rychleji pro bod **B :** Po napsání příslušných rovnic zjistíme, že λ_2 je opět rovno nule a pro ostatní neznámé si sestavíme rozšířenou matici soustavy. Tentokrát je

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 9/8 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1/8 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 3/4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -7/8 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1/8 \\ 0 & -2 & -2 & -3 & -5/4 \end{array}\right) \sim$$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 7/8 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3/4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3/8 \end{array}\right)$. Zpětným chodem dostáváme $\lambda_4 = \frac{1}{4}$, dále

$\lambda_3 = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$. Dále je $2\lambda_1 = \frac{7}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, a tedy $\lambda_1 = \frac{1}{8}$.

Nakonec je $\lambda_0 = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Všechny koeficienty jsou tedy nezáporné a jejich součet je jedna, tedy bod **B** je bodem simplexu.

Jeho barycentrické souřadnice, které udávají jeho polohu vzhledem k vrcholům simplexu, jsou po řadě $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4})$.

KAPITOLA 10

KVADRATICKÉ FORMY

10.1. Matice kvadratické formy, klasifikace kvadratických forem

Nechť **C** je čtvercová matice řádu **n**, **C** = (c_{ij}) . **Kvadratickou formou**

n proměnných x_1 , x_2 , … , x_n s koeficienty c_{ij} nazýváme funkci

Q(x_1,x_2,…,x_n) = $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_i x_j$ = $c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + \ldots + c_{1n}x_1x_n + c_{21}x_2x_1 + c_{22}x_2^2 + \ldots + c_{2n}x_2x_n + c_{31}x_3x_1 + \ldots + c_{3n}x_3x_n + \ldots + c_{nn}x_n^2$.

Lze vytknout

$x_1\,(c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n) + x_2\,(c_{21}x_1 + \ldots + c_{2n}x_n) + \ldots + x_n\,(c_{n1}x_1 + \ldots + c_{nn}x_n)$

a lze pak psát

$$\mathbf{Q}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{XCX^T}\,.$$

Pozor, výsledkem je číslo!

Je tedy **Q**(**X**) = $\mathbf{XCX^T}$.

Matice **C** je matice kvadratické formy. Danou maticí je forma určena jednoznačně.

Ale naopak různé čtvercové matice mohou určovat tutéž formu např.

C = $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, k ní transponovaná $\mathbf{C^T}$ = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ a matice **D** = $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ určují tutéž formu, protože je

$\mathbf{Q_C}(x_1,x_2) = x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2x_1 + 4x_2^2 = x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_2^2$ a stejné jsou po úpravě i formy $\mathbf{Q_C}^{T}$ a $\mathbf{Q_D}$.

Abychom tuto nejednoznačnost odstranili, pracujeme se symetrickými maticemi. Ke každé formě lze přiřadit jedinou symetrickou matici. Naše forma má symetrickou matici **S** = $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Klasifikace kvadratických forem:

Kvadratická forma se nazývá

a) **pozitivně definitní**, je-li **XCX^T** > 0 pro všechny vektory **X**$\in$ **V_n** různé od nulového vektoru, pro nulový vektor je rovna nule

b) **negativně definitní**, je-li **XCX^T**< 0 pro všechny vektory **X**$\in$ **V_n** různé od nulového vektoru, pro nulový vektor je rovna nule

c) **pozitivně semidefinitní**, je-li **XCX^T**≥ 0 pro všechna **X**$\in$**V_n**

d) **negativně semidefinitní**, je –li **XCX^T**≤ 0 pro všechna **X**$\in$**V_n**

e) **indefinitní,** je-li pro některé vektory z V_n nezáporná a pro jiné nekladná.

Toto názvosloví se přenáší i na související symetrické matice. Je zřejmé, že je-li matice **C** pozitivně definitní, je matice **–C** negativně definitní, je-li matice **C** pozitivně semidefinitní, je **–C** negativně semidefinitní, a naopak.

Příklad: Určeme typ definitnosti matic **C** = $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ a **C_1** = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Příslušná forma **Q_C**$(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + 4x_2^2 = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 =$

$2(x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2) = 2(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + 2x_2^2 = 2(x_1 + x_2)^2 + 2x_2^2$.

Je tedy **Q_C**(**X**) = 0 pro $x_2 = 0$ a pro $x_1 = -x_2 = 0$, tedy pouze pro nulový vektor. Matice **C** je pozitivně definitní.

Q_{C1} $= x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_1 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2$.

Je tedy **Q_{C1}** = 0 pro $x_1 = -x_2$, a tomuto vztahu vyhovuje nekonečně mnoho nenulových vektorů. Forma **Q_{C1}** je tedy pozitivně semidefinitní, jelikož záporná být nikdy nemůže.

Podobným způsobem, který jsme použili v příkladu, tedy doplňováním na úplné čtverce, pracuje tak zvaná Lagrangeova metoda pro zjišťování typu definitnosti kvadratických forem a matic.

My se zaměříme na metodu jinou, která používá vlastních čísel symetrických matic, jež, jak již víme, jsou vždy reálná, a geometrická násobnost je vždy rovna aritmetické násobnosti, neboli pro libovolnou symetrickou matici existuje Jordanův kanonický tvar.

10.2. Kanonický tvar kvadratické formy, signatura kvadratické formy

Reálná symetrická matice je pozitivně definitní právě když jsou všechna její vlastní čísla kladná, negativně definitní právě když jsou všechna její vlastní čísla záporná, pozitivně semidefinitní právě když jsou její vlastní čísla kladná a alespoň jedno je rovno nule, negativně semidefinitní právě když jsou její vlastní čísla záporná a alespoň jedno je rovno nule, a indefinitní, právě když má jak kladná tak záporná vlastní čísla.

Příslušná forma má pak stejnou definitnost.

Příklad: Určeme definitnost matice **S** = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

Najdeme charakteristickou rovnici: $(1-\boldsymbol{\lambda})(9-\boldsymbol{\lambda}) - 9 = 0$ a řešíme ji. Dostáváme

$\boldsymbol{\lambda}^2 - 10\boldsymbol{\lambda} = 0$, tedy $\boldsymbol{\lambda}_1 = 10$, $\boldsymbol{\lambda}_2 = 0$. Matice je tedy pozitivně semidefinitní a příslušná kvadratická forma též.

Víme, že každá symetrická matice má Jordanův kanonický tvar, na jehož diagonále jsou vlastní čísla a všude jinde nuly. Lze tedy každou formu převést na tvar složený pouze z kvadrátů, u nichž jsou jako koeficienty vlastní čísla. Např. naše matice **S** z výše uvedeného příkladu má kanonický tvar $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a příslušná forma v kanonickém tvaru je $\mathbf{Q}_{\mathrm{J}} = 10x_1^2$.

Tento kanonický tvar dostaneme, jak známo, podobnostní transformací s maticí vlastních vektorů.

Báze, neboli geometricky soustava souřadnic, vzhledem k níž má kvadratická forma tvar $Q(x_1,x_2,\dots,x_n) = \boldsymbol{\lambda}_1 x_1^2 + \dots + \boldsymbol{\lambda}_n x_n^2$, se nazývá **polární báze.** Jejím hledáním se nebudeme zabývat.

Další charakteristikou, kterou pro kvadratické formy zavádíme, je **signatura kvadratické formy.** Je to uspořádaná dvojice čísel (**p,r**), kde **p** je počet kladných a **r** je počet záporných vlastních čísel. (Někdy je též signatura zaváděna jako trojice čísel, přičemž třetí číslo v pořadí explicitně udává počet nulových vlastních čísel).

Tedy pozitivně definitní kvadratická forma o n proměnných má signaturu (n,0), negativně definitní forma má signaturu (0, n), pozitivně semidefinitní forma má signaturu (p, 0), kde $p<n$, negativně semidefinitní forma má signaturu (0, r), kde $r< n$, a konečně indefinitní kvadratická forma má signaturu (p, r), kde $p>0$, $r>0$, $p+r \leq n$.

Signatura matice **S** z výše uvedeného příkladu je (1, 0).

10.3. Sylvestrovo kritérium pro určování definitnosti matic

Zaveďme nejprve pojem hlavní submatice. Mějme čtvercovou matici

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. **Hlavní submaticí** této matice rozumíme takovou submatici, u níž diagonální prvky zůstávají v diagonále. Tedy

pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ jsou hlavními submaticemi např. matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} .$$

Hlavní minory (hlavní subdeterminanty) čtvercové matice jsou determinanty příslušné hlavním submaticím, které začínají v levém horním rohu a nemají vynechané řádky. Tedy naše matice **A** má čtyři hlavní minory – poslední z nich je přímo determinant příslušný k matici **A.**

Jsou to:

det$A_1 = |3|$, **det** $A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$, **det** $A_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, **det** $A_4 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

A nyní vyslovme **Sylvestrovo kritérium:**

Symetrická matice je

a) pozitivně definitní, právě když jsou všechny její hlavní minory kladné,

b) negativně definitní, je-li první minor záporný a další střídají znaménka,

c) indefinitní, není-li žádný hlavní minor roven nule, a přitom neplatí a) a b).

Pro semidefinitní matice obdoba Sylvestrova kritéria neexistuje. Pokud jsou některé hlavní minory nulové, nelze kritérium použít a je třeba zjistit definitnost matice na základě vlastních čísel.

Příklad: Určeme definitnost kvadratické formy

Q$(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 + 3x_3^2$.

Symetrická matice je tvaru **S** $= \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Její hlavní minory jsou

det $A_1 = 2$, **det** $A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$, **det** $A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -7$.

Žádný hlavní minor není nulový a neplatí ani a) ani b), tedy se jedná o indefinitní matici **S** a tedy o indefinitní kvadratickou formu.

Příklad: Určeme definitnost kvadratické formy

$\mathbf{Q}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 + 9x_2^2 - 12x_2x_3 + 4x_3^2$.

Příslušná symetrická matice je $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & -6 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{det\,A}_1 = 1$, $\mathbf{det\,A}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$. Sylvestrovo kriterium nelze použít.

Pomocí charakteristické rovnice zjistíme tedy vlastní čísla,(proveďte sami). Jelikož jsou $\boldsymbol{\lambda}_1 = \boldsymbol{\lambda}_2 = 0$, $\boldsymbol{\lambda}_3 = 14$, jsou matice **S** a příslušná kvadratická forma pozitivně semidefinitní.

Literatura:

Bican,L.:Lineární algebra a geometrie, Academia 2009, ISBN 978-80-200-1707-1

Bican,L.,Slavík,V.: Matematika 3, ČZU a Naroma 1999, ISBN 80-213- 521-5

Hojdarová,M.: Matematika 3 – Numerické metody, VŠZ 1980, 10027/70

Němec,P.,Slavík,V.: Matematika 3 pro TF, ČZU a Naroma 1999, ISBN 80-213-0522-3

Olšák,P.: Úvod do algebry, zejména lineární, FEL ČVUT 2007, ISBN 978-80-01-03775-1